

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم
جامعة الحدود الشمالية
عمادة السنة التحضيرية
والدراسات المساندة
قسم العلوم الأساسية

الرياضيات العامة

لطلبة التحضيرية للكليات النظرية

إعداد

قسم العلوم الأساسية

بعمادة السنة التحضيرية والدراسات المساندة

جامعة الحدود الشمالية

الطبعة الثانية 2017



المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم العالي

جامعة الحدود الشمالية

عمادة السنة التحضيرية والدراسات المساندة

الرياضيات العامة

إعداد

قسم العلوم الأساسية

الرياضيات

2018-2017



محتويات الكتاب

الباب الأول : مفاهيم جبرية

الباب الثاني : التحليل

الباب الثالث : المعادلات والمتراجحات الخطية

الباب الرابع : الدوال

مقدمة

تعريف الرياضيات

الرياضيات هي واحدة من أكثر أقسام المعرفة الإنسانية فائدة وإثارة. ويُعزى سبب صعوبة تعريف كلمة رياضيات إلى المواضيع العديدة التي تشملها ومنها الرياضيات الأساسية التي تدرس بالمدارس، دراسة الأعداد والكميات والصيغ والعلاقات. فعلى سبيل المثال، يدرس الحساب مسائل تتعلق بالأعداد، ويتضمن الجبر حل معادلات (وهي صيغ رياضية تقوم على المساواة) تمثل الأحرف فيها كميات مجهولة. وهكذا...

الحاسوب(الحاسب الالي) أداة رياضية تقوم بالعمليات الحسابية بسرعة عالية. ويستخدم علماء الرياضيات الحاسوب لإجراء العمليات الحسابية المعقدة خلال دقائق قليلة، والتي قد يتطلب إجراؤها آلاف السنين باستخدام القلم والورقة وتتطلب الرياضيات مهارات أهمها: التحليل الدقيق، والتّعليل الواضح، وتساعد تلك المهارات الناس على حل بعض الألغاز الصعبة التي تواجههم

وتُبنى الرياضيات على المنطق، انطلاقا بفرضيات قُبلت على نطاق واسع، استخدم علماء الرياضيات المنطق لاستخراج النتائج وتطوير نظم راضية متكاملة .

ويمكن تقسيم الرياضيات إلى رياضيات **بحتة** ورياضيات **تطبيقية** حيث تهتم الرياضيات البحتة مجال الدراسة بتطوير المعرفة الرياضية لذاتها دون اعتبار لتطبيق حالي عاجل، فمثلاً، قد يبتدع أحد علماء الرياضيات عالمًا خياليًا لكل شيء فيه أبعاد أخرى غير الطول والعرض والارتفاع. وتهتم الرياضيات التطبيقية بتطوير أساليب رياضية لتستخدم في العلوم والمجالات الأخرى ويتأثر كل جزء من حياتنا تقريباً بالرياضيات. ولعبت الرياضيات دوراً أساسياً في تطور التقنية الحديثة ـ كالأدوات، والتقنيات، والمواد، ومصادر الطاقة التي جعلت حياتنا وعملنا أكثر يسرا.

تتدخل الرياضيات في تفاصيل حياتنا اليومية البسيطة منها والمعقدة. ففي الأمور البسيطة نتعرف على الوقت، وباقي نقودنا بعد شراء شيء ما، وفي الأمور المعقدة كتنظيم ميزانية البيت أو تسوية دفتر الشيكات. وتستخدم الحسابات الرياضية في الطبخ والقيادة والبستنة، والخياطة، ونشاطات عامة عديدة أخرى. وتؤدي الرياضيات كذلك دورًا في العديد من الهوايات والألعاب الرياضية.

للرياضيات دور هام في جميع الدراسات العلمية تقريباً إذ تساعد العلماء على تصميم تجاربهم وتحليل بياناتهم ويستخدم العلماء الصيغ الرياضية لتوضيح ابتكاراتهم بدقة، ووضع التنبؤات المستندة إلى ابتكاراتهم كما تعتمد العلوم الإنسانية كالاقتصاد، وعلم النّفس، وعلم الاجتماع بقدر كبير على الإحصاء وأنواع أخرى في الرياضيات. فمثلاً، يستخدم الاقتصادي الحاسوب لتصميم رياضي للأنظمة الاقتصادية. وتستخدم نماذج الحاسوب هذه مجموعة من الصيغ لمعرفة مدى التأثير الذي قد يحدثه تغير في جزء من الاقتصاد على الأجزاء الأخرى.

تساعد الرياضيات الصناعة في التصميم، والتطوير، واختبار جودة الإنتاج والعمليات التصنيعية. فالرياضيات ضرورية لتصميم الجسور، والمباني والسدود والطرق السريعة، والأنفاق، والعديد من المشاريع المعمارية والهندسية الأخرى.

تُسْتَخْدَم الرياضيات في المعاملات المتعلقة بالبيع والشراء. وتكمن حاجة الأعمال التجارية الى الرياضيات في حفظ سجلات المعاملات كمستويات الأسهم، وساعات عمل الموظفين ورواتبهم. ويستخدم المتعاملون مع البنوك الرياضيات لمعالجة واستثمار سيولتهم النقدية. وتساعد الرياضيات كذلك شركات التأمين في حساب نسبة المخاطرة وحساب الرسوم اللازمة لتغطية التأمين.

تاريخ الرياضيات

كان الكتبة منذ 3000 سنة يمارسون كتابة الأعداد وحساب الفوائد لاسيما في الأعمال التجارية ببابل. وكانت الأعداد والعمليات الحسابية تدون فوق ألواح الصلصال بقلم من البوص المدبب. ثم توضع في الفرن لتجف. وكانوا يعرفونالجمع والضرب والطرح والقسمة. ولم يكونوا يستخدمون فيها النظام العشري المتبع حاليا مما زادها صعوبة حيث كانوا يتبعون النظام الستيني الذي يتكون من 60 رمزا للدلالة على الأعداد من 1-60. ومازال النظام الستيني متبعا حتى الآن في قياس الزوايا في حساب المثلثات وقياسالزمن (الساعة = 60 دقيقة والدقيقة = 60 ثانية). طور قدماء المصريين هذا النظام في مسح الأراضي بعد كل فيضان لتقدير الضرائب. لهذا كانوا يكتبون 500 بوضع 5 رموز يعبر كل رمز على 100. وأول العلوم الرياضية التي ظهرت قديما كانت الهندسة لقياس الأرض وحساب المثلثات لقياس الزوايا والميول في البناء. وكان البابليون يستعملونه في التنبؤ بمواعيد الكسوف للشمس والخسوف للقمر. وهذه المواعيد كانت مرتبطة بعباداتهم. وكان قدماء المصريون يستخدمونه في بناء المعابد وتحديد زوايا أالاهرامات وكانوا يستخدمون الكسور لتحديد مساحة الدائرة بـالتقريب.

الرياضيات عند الإغريق

نقل الإغريق الرياضيات الفرعونية واستطاع تاليس في القرن السابع ق.م أن يجعل الرياضيات نظريات بحتة حيث بين أن قطر الدائرة يقسمها لنصفين متساويين في المساحة والمثلث المتساوي الضلعين به زاويتين متساويتين. وتوصل بعده فيثاغورث إلى أن في المثلث مربع ضلعي الزاوية القائمة يساوي مربع الوتر. وفي الإسكندرية ظهر إقليدس في القرن الثالث ق.م ووضع أسس الهندسة التي عرفت بالإقليدية والتي مازالت نظرياتها تتبع حتى يومنا هذا. ثم ظهر أرخميدس (287 ق.م -212 ق.م) باليونان حيث عين الكثافة النوعية، ولم يضف الرومان جديداً على الرياضيات بعد الإغريق.

الرياضيات الهندية

في بلاد الشرق نجد أن الهنود قد ابتكروا الأرقام العربية التي نستعملها حتى اليوم وقد أخذها العرب عنهم وأطلقوا عليها علم الخانات. وكان الهنود يستعملون الأعداد العشرية من1-9 وأضافوا لها الصفر، وهذا العلم نقلته أوروبا عن المسلمين.

الرياضيات عند المسلمين

في بغداد أسس الخوارزمي علم الجبر والمقابلة في أوائل القرن التاسع، وفي خلافة أبي جعفر المنصور ترجمت بعض أعمال العالم السكندري القديم بطليموس القلوذي كتابه المعروف باسم"المحبسطي"واسم هذا الكتاب في اليونانيةالكتاب الأعظم في الحساب والكتاب دائرة معارف في علم الفلك والرياضيات، وقد أفاد منه علماء المسلمين وصححوا بعض معلوماته وأضافوا إليه، وعن الهندية ترجمت أعمال كثيرة مثل الكتاب الهندي المشهور في علم الفلك والرياضيات (سد هانتا) " المعرفة والعلم والمذهب".

وقد ظهرت الترجمة العربية في عهد أبي جعفر المنصور بعنوان " السند هند". ومع كتاب السند هند دخل علم الحساب الهندي بأرقامه المعروفة في العربية بالأرقام الهندية فقد تطور على أثرها علم العدد عند العرب، وأضاف المسلمون نظام الصفر مما جعل الرياضيين العرب يحلون الكثير من المعادلات الرياضية من مختلف الدرجات فقد سهل استعماله لجميع أعمال الحساب، وخلص نظام الترقيم من التعقيد، ولقد أدى استعمال الصفر في العمليات الحسابية إلى اكتشاف الكسر العشري الذي ورد في كتاب مفتاح الحساب للعالم الرياضي جمشيد بن محمود غياث الدين الكاشي (ت 840 هـــ 1436 م)، وكان هذا الكشف المقدمة الحقيقية للدراسات والعمليات الحسابية المتناهية في الصغر.

واستخرج إبراهيم الفزاري جدولاً حسابياً فلكياً يبين مواقع النجوم وحساب حركاتها وهو ما عرف بالزيج. وفي بغداد أسس الخوارزمي علم الجبر والمقابلة (المعادلة) في أوائل القرن التاسع. وكان من علماء بيت الحكمة ببغداد محمد بن موسى الخوارزمي (ت 232 هـ 846م) الذي عهد إليه المأمون بوضع كتاب في علم الجبر، فوضع كتابه "المختصر في حساب الجبر والمقابلة" وهذا الكتاب هو الذي أدى إلى وضع لفظ الجبر وإعطائه مدلوله الحالي. قال ابن خلدون: "علم الجبر والمقابلة (أي المعادلة) من فروع علوم العدد، وهو صناعة يستخرج بها العدد المجهول من العدد المعلوم إذا كان بينهما صلة تقتضي ذلك فيقابل بعضها بعضاً، ويجبر ما فيها من الكسر حتي يصير صحيحاً" فالجبر علم عربي سماه العرب بلفظ من لغتهم ، والخوارزمي هو الذي خلع عليه هذا الاسم الذي انتقل إلى اللغات الأوروبية بلفظه للدلالة على نظام الأعداد وعلم الحساب والجبر وطريقة حل المسائل الحسابية.

وظهرت عبقرية "الخوارزمي" في "الزيج" أو الجدول الفلكي الذي صنعه وأطلق عليه اسم "السند هند الصغير" وقد جامع فيه بين مذهب الهند، ومذهب الفرس، ومذهب بطليموس (مصر)، فاستحسنه أهل زمانه آنذاك وانتفعوا به مدة طويلة فذاعت شهرته وصار لهذا الزيج أثر كبير في الشرق والغرب، وقد نقل الغرب العلوم الرياضية عن العرب وطوروها، وكان يجري من خلال لوحة العد الجمع والطرح والضرب والقسمة.

تطور الرياضيات

وبناء على ما سبق فإن الرياضيات ظهرت بداية كحاجة للقيام بالحسابات في الأعمال التجارية، ولقياس المقادير، كالأطوال والمساحات ولتوقع الأحداث الفلكية يمكن اعتبار الحاجات الثلاث هذه البداية للأقسام العريضة الثلاث للرياضيات، وهي دراسة البنية، الفضاء، والتغير. ظهرت دراسة البنى مع ظهور الاعداد وكانت بداية مع الأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة والعمليات الحسابية عليها، ثم أدت الدراسات المعمقة على الأعداد إلى ظهور نظرية الأعداد. كما أدى البحث عن طرق لحل المعادلات إلى ظهور الجبر المجرد، أن الفكرة الفيزيائية الشعاع تم تعميمها إلى الفضاءات الشعاعية وتمت دراستها في الجبر الخطي وعليها ظهرت دراسة الفضاء مع الهندسية، وبداية مع الهندسة الإقليدية وعلم المثلثات، في الفضائيين ثنائي وثلاثي الأبعاد ثم تم تعميم ذلك لاحقا إلى العلوم الهندسية غير اقليدية، لتلعب دورا في النظرية النسبية العامة. فهم ودراسة التغير في القيم القابلة للقياس هو ظاهرة عامة في العلوم الطبيعية، فظهر التحليل الرياضي كأداة مناسبة للقيام بهذه العمليات، حيث أن الفكرة العامة هي التعبير عن القيمة بتابع، ومن ثم يمكن تحليل الكثير من الظواهر على أساس دراسة معدل تغير هذا التابع ومع ظهور الحواسيب ظهرت العديد من المفاهيم الرياضية الجديدة، كعلوم قابلية الحساب، تعقيد الحساب، نظرية المعلومات والخوارزميات، والعديد من المفاهيم الحالية جزء من علوم الحاسوب وهناك حقل آخر هام من حقول الرياضيات هو الاحصاء الذي يستخدم نظرية الاحتمال في وصف وتحليل وتوسع سلوك الظواهر في مختلف العلوم، بينما يوفر التحليل الرياضي طرقاً فعالة في القيام بالعديد من العمليات الحسابية على الحاسوب، مع أخذ أخطاء التقريب بالاعتبار.

الباب الأول: مفاهيم جبرية

الهدف من هذا الباب

في الجزء الأول من الباب سنتعرف على المجموعات واستخدامتها في المجالات الحياتية المختلفة ثم نتعرف في الجزء الثاني من الباب على الأعداد الحقيقية ثم نأخذ قواسم العدد ومضاعفاته وفي الجزء الرابع من الباب سنتطرق إلى الأسس والقوى المرفوعة للعدد الحقيقي وأخيراً سنتعلم كيفية التعامل مع المقادير الجبرية .

1 الفصل الأول: المجموعات

2 الفصل الثاني: العمليات على الأعداد الحقيقية

3 الفصل الثالث القوى المرفوعة للعدد الحقيقي

4 الفصل الرابع قواسم العدد ومضاعفاته

5 الفصل الخامس العمليات على المقادير الجبرية





بعد الانتهاء من هذا الباب يجب أن تكون قادراً على فهم:

المجموعات والعمليات عليها، خصائص الأعداد الحقيقية واجراء العمليات الحسابية عليها،

اجراء عمليات الضرب المتكرر والتعمل مع الجذور، ايجاد المضاعف المشترك الصغر والكبر لمجموعة من الأعداد

أجراء العمليات الجبرية المختلفة على أي مقدار جبري.




الباب الأول
مفاهيم جبرية
A
B
الفصل الأول
المجموعات

الفصل الأول : المجموعات

محتويات الفصل

الفصل الأول: المجموعات
Section (1): Sets

للمجموعات أهمية كبرى في الرياضيات، وفي الواقع يتم تعريف معظم الكيانات الرياضية، في المعالجات الرسمية الحديثة الأعداد والعلاقات، والدوال الرياضية، إلخ.) من حيث المجموعات. ويمكن النظر إلى نظرية المجموعات المبسطة باعتبارها وسيلة نحو معالجات أكثر رسمية وكافية لأغراض متعددة ومن المفيد دراسة المجموعات ببساطة في مرحلة مبكرة من تعلم الرياضيات من أجل تطوير سهولة التعامل معها. وعلاوة على ذلك، يعد الاستيعاب الجيد لمفاهيم م المجموعات النظرية من وجهة نظر مبسطة مهمًا كمرحلة أولى في فهم الدافع وراء البديهيات الرسمية لنظرية المجموعات.

تتصف المجموعة في نظرية المجموعات المبسطة بأنها مجموعة من الكيانات القابلة للتعريف بشكل جيد. تسمى هذه الكيانات بـعوامل أو عناصر المجموعة. ويمكن أن تكون هذه الكيانات: أعداد، أو أشخاص، أو مجموعات أخرى، إلخ. وعليه يمكن تعريف المجموعة على النحو الاتي:

المجموعة
(Set)

هي تجمع من الأشياء لها صفة مشتركة المعروفة والمحددة تحديداً تاماً.

خواص المجموعات
(Sets Properties)

(1) المجموعة كائن رياضي قائم بذاته حتى لو كانت تحتوي على عنصر واحد.

(2) لا يمكن تكرار أي عنصر من عناصرها فمثلاً كلمة محمد هي م، ح، د حيث لم يظهر حرف م سوى مرة واحدة.

(3) ليس للترتيب في عناصر المجموعة أي تأثير فمثلاً اذا كانت عناصر المجموعة هي 1,2,3,4,5,6 فهي نفسها إذا كانت العناصر 1,2,3,5,4,6

مثـــال (1)

- مجموعة الحروف العربية .
- مجموعة طلاب كلية العلوم.
- مجموعة فصول السنة.
- مجموعة الدول اعضاء مجلس التعاون الخليجي.



الخوارزمي

هو أبو عبد الله بن موسى الخوارزمي، ولد في خوارزم في روسيا (164هـ-780م)، وقد أحاط في شبابه بعلوم الأغريق وزار بلاد الهند وفارس واستطاع أن يكسب ثقة المأمون في بغداد حيث ولاه بيت الحكمة، وقد وصفه سارتون بأنه أكبر الرياضيين على الاطلاق لدرجة أن العصر الذي عاش فيه سمي بعصر الخوارزمي، وقد توفي في بغداد بالعراق حوالي عام (232-236هـ) الموافق (841-850م).

من أهم مؤلفاته (رسالة في الحساب) التي تضمنت الأرقام الهندية، منزلة الأعداد، الصفر، وهي تعد أول ما ألف في هذا العلم، وكتاب (الجبر والمقابلة) الذي أوضح فيه مبادئ علم الجبر والصيغ المعيارية، كما استنبط فيه طرقاً هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية.

ويرمز للمجموعات عادة بالأحرف الكبيرة مثل $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ والأشياء التي تتألف منها المجموعة تسمى عناصر ويرمز للعناصر بالأحرف الصغيرة $a, b, c, \dots, x, y, z$.

إذا كان العنصر x هو أحد عناصر المجموعة A فإنه يقال أن x ينتمي إلى A وتكتب $x \in A$ ، أما إذا كان العنصر y لا ينتمي للمجموعة A فإننا نكتب $y \notin A$ ، فمثلاً المجموعة $A = \{1,3,5,7\}$ نجد فيها أن العنصر 3 ينتمي إلى المجموعة وبالتالي $3 \in A$ والعنصر 2 لا يوجد في المجموعة وبالتالي $2 \notin A$.

المجموعة المنتهية وغير المنتهية

(Finite and Infinite Sets)

المجموعات التي تتألف من عدد محدود من العناصر ويمكن عدها تسمي مجموعات منتهية، أما التي تتألف من عدد غير محدود من العناصر أي أنها مجموعة لانهائية تسمى مجموعات غير منتهية.

مثـــال (2)

أمثلة لمجموعات منتهية:

(1) مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 30،

(2) مجموعة سكان المملكة العربية السعودية،

(3) مجموعة عواصم الدول الخليجية،

(4) مجموعة حروف اللغة العربية.

مثـــال (3)

أمثلة لمجموعات غير منتهية:

(1) مجموعة النجوم الموجودة في السماء،

(2) مجموعة الاعداد الطبيعية،

(3) مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على 3 من الأعداد الصحيحة،

(4) مجموعة ذرات الرمل الموجودة في الربع الخالي.

تعيين المجموعة

يعبر عن المجموعة بإحدى الطريقتين التاليتين:

- طريقة السرد (الحصر): إذا عرفت جميع عناصرها وفي هذه الحالة يتم فيها كتابة جميع العناصر المكونة للمجموعة داخل قوسين من الشكل $\{\dots, \dots, \dots\}$ عنصراً تلو الآخر دون تكرار ويفصل بين كل عنصر وعنصر فاصلة.
- طريقة الوصف: يمكن تعيينها بذكر صفة أو خاصية تميز عناصر المجموعة داخل قوسين وتأخذ الشكل{$x: x$ الخاصيـــــة}، وجدير بالذكر أن العلامة ":" تعني "حيث أن".

مثـــال (4)

(طريقة السرد أو الحصر)

(1) مجموعة الحروف المكونة لكلمة saudi هي:

$$X = \{s, a, u, d, i\}$$

(2) مجموعة دول مجلس التعاون الخليجي هي:

$Y =$ {السعودية, عمان, الكويت, قطر, الإمارات, البحرين, ...}

(3) مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية الأقل من 13 هي:

$$Z = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

مثــــال (5)

(طريقة الوصف)

(1) $\{x: 0 \le x \le 4\}$

(2) $Y = \{y:$ حرف من حروف كلمة $Egypt\}$

(3) $Z = \{z:$ دولة من الدول العربية $\}$

رتبة المجموعة

رتبة المجموعة X ويرمز لها بالرمز $|X|$ ، ويعني عدد العناصر الموجودة في المجموعة X.

مثــــال (6)

إذا كانت $X = \{a, b, c, d, e\}$ ، $Y = \{2,4,6,8\}$ فان: $|X| = 5$ ، $|Y| = 4$

وإذا كانت $Y = \{1, s, 8\}$ ، $X = \{w, r\}$ فان: $|Y| = 3$ ، $|X| = 2$.

المجموعة الخالية

(Empty Set)

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا توجد بها أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ أو $\{\ \ \}$

مثــــال (7)

إذا كانت لدينا مجموعة الأعداد الفردية فإن المجموعة X هي المجموعة التي تقبل القسمة على 2 نجد أن كل الأعداد الفردية لا تقبل القسمة على 2 وبالتالي فان $X = \phi$.

مثــــال (8)

ملحوظة (1)

رتبة المجموعة الخالية ϕ تساوي صفـــــر.

كل مجموعة من المجموعات الآتية مجموعة خالية:

$$A = \{x: x \text{ بلد عربي يقع في قارة أوروبا}\}$$

$$Y = \{y: y \text{ طالب بجامعة الحدود الشمالية عمره } 10 \text{ سنوات}\}$$

$$Z = \{z: 4 < z < 5 \text{ عدد طبيعي } z\}$$

المجموعات المتساوية

يقال إن المجموعتين A, B متساويتين إذا كانتا تحتويان على نفس العناصر بالضبط، بمعنى أنه، إذا كان كل عنصر من A عنصراَ من B وكل عنصر من عناصر B هو عنصر من A، وفي هذه الحالة نكتب:

$$A = B$$

مثــــال (9)

تعتبَر المجموعة A التي تحتوي على الأرقام 2,3,5 مساويةً للمجموعة B التي تحتوي على جميع الأعداد الأولية الأقل من العدد 6 أي أن:

$$A = \{2,3,5\} = B = \{2,3,5\}$$

مثــــال (10)

ملحوظة (2):

إذا وجد عنصر واحد فقط على الاقل في إحدى المجموعتين ولا يوجد في المجموعة الأخرى فان المجموعتين غير متساويتين

اذا كانت X مجموعة حروف كلمة "Mohamed" وكانت Y مجموعة حروف كلمة "Ahmed" فإن:

$$X = \{m, o, h, a, e, d\}, \qquad Y = \{a, h, m, e, d\}$$

وبالتالي فان:

$$X \ne Y$$

لأن عنصر o أو حرف (o) لا يوجد في المجموعة Y.

المجموعة الجزئية
(Subset)

يقال إن المجموعة X مجموعة جزئية من المجموعة Y إذا كانت كل عناصر المجموعة X موجودة في المجموعة Y وتكتب على الصورة: $X \subset Y$

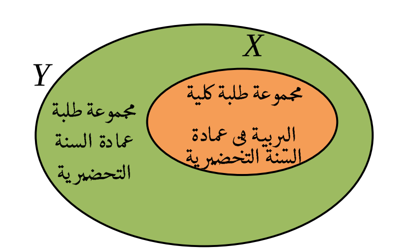
ويمكن القول بان المجموعة Y مجموعة جزئية من المجموعة X إذا كانت كل عناصر المجموعة Y موجودة في المجموعة X وتكتب على الصورة: $Y \subset X$

مثـــــال (11)

إذا كان المجموعة X تمثل مجموعة طلبة كلية التربية في عمادة السنة التحضيرية للعام الجامعي 1436 هـ والمجموعة Y تمثل مجموعة طلبة عمادة السنة التحضيرية للعام الجامعي 1436 هـ، أي ان جميع عناصر المجموعة X هم بعض عناصر المجموعة Y أي أن:

$$X \subset Y$$

ويمثل الشكل 1.1 شكل فن لهذا المثال.



شكل 1.1

ويمكن من تعريف المجموعات الجزئية استنتاج ما يلي:

(1) أي مجموعة A هي مجموعة جزئية من نفسها، أي أن: $A \subset A$

(2) المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة X، أي أن: $\phi \subset X$

(3) تتساوى المجموعتان A، B إذا كانت $A \subset B$، $B \subset A$

مثـــــال (12)

إذا كانت:

$$X = \{1,2,3\}, \qquad Y = \{1,2,3,4\}, \qquad Z = \{2,4,6\}$$

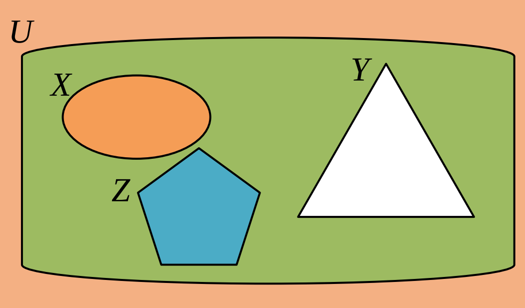
(1) فإن كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y، وبالتالي فإن $X \subset Y$

(2) العنصر 6 لا ينتمي إلى المجموعة Y وبذلك تكون $Z \not\subset Y$

ملحوظة (3):
المجموعة الخالية ϕ هى مجموعة جزئية من أي مجموعة

المجموعة الشاملة
(Universal Set)

هي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر والمجموعات وتسمي المجموعة الام ويرمز لها بالرمز U ويمكن تمثيلها بالشكل التالي.



شكل 1.2

مجموعة المجموعات الجزئية لأي مجموعة

إذا كان عدد عناصر أي مجموعة هو n فإن عدد المجموعات الجزئية لهذه المجموعة يعطى بالقانون:

عدد المجموعات الجزئية $= 2^n$

مثـــال (13)

إذا كانت:

$$A = \{1,2\}$$

أوجد مجموعة المجموعات الجزئية من المجموعة A.

الحل

باعتبار مجموعة المجموعات الجزئية S حيث:

$$S = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{\phi\}\}$$

العنصر $\{2\}$ هو أحد عناصر S ولذلك نجد أن $\{2\} \in S$، المجموعة $\{2\}$ هي مجموعة جزئية $\{2\} \subset$ A، لاحظ أن عدد المجموعات الجزئية هو عبارة عن 2^n أي أن عدد المجموعات الجزئية يساوي 2^2 أي يساوي 4.

مثـــال (14)

إذا كانت $X = \{a,b,c\}$ اكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة X.

الحل

نفرض أن المجموعة A هي جميع المجموعات الجزئية للمجموعة X وبالتالي فإن:

$$A = \{\{\phi\},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{X\}\}$$

وعدد عناصر A عبارة عن 2^n أي

$$2^n = 2^3 = 8$$

ملحوظة (4):

$\{b\} \in A,\quad \{b\} \not\subset A$

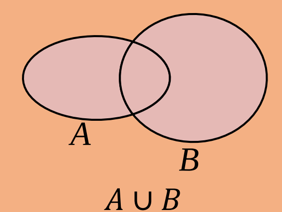
$X \in A,\quad X \not\subset A$

العمليات على المجموعات (الاتحاد)

<u>(1) عملية اتحاد مجموعتين (Union):</u>

إذا كان لدينا المجموعتين A,B فان اتحاد A,B هو عبارة عن جميع عناصر A,B وبدون تكرار أي أن:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$



شكل 1.3

مثـــال (15)

إذا كانت المجموعة A هي $A = \{1,2,3,4,5\}$ والمجموعة B هي $B = \{2,4,6\}$ فإن:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

مثـــــال (16)

إذا كانت X هي مجموعة حروف كلمة "Saudi" وكانت Y هي مجموعة حروف كلمة " Star " أوجد:

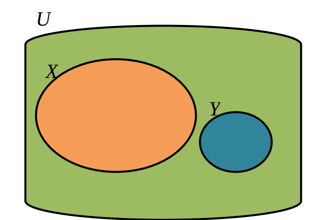
$$X \cup Y$$

الحل

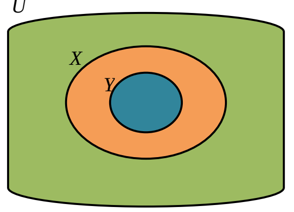
$$X = \{S, a, u, d, i\}, \qquad Y = \{S, t, a, r\}$$

وبالتالي من تعريف اتحاد مجموعتين نجد أن:

$$X \cup Y = \{S, t, a, r, u, d, i\}$$



$X \cup Y = Y \cup X$



$X \cup Y = X$

شكل 1.4

ومن خلال تعريف الاتحاد اذا كانت U هي المجموعة الشاملة وكانت كل من X, Y, Z مجموعات جزئية من U فإن:

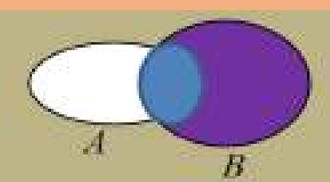
$$\begin{aligned}
(1)\quad & X \cup X && = X \\
(2)\quad & X \cup \phi && = X \\
(3)\quad & X \cup Y && = Y \cup X \\
(4)\quad & X \cup U && = U \\
(5)\quad & (X \cup Y) \cup Z && = X \cup (Y \cup Z)
\end{aligned}$$

العمليات على المجموعات (التقاطع)

(2) عملية تقاطع مجموعتين (Intersection)

إذا كانت لدينا مجموعتان A, B فإن تقاطع المجموعتين هو العناصر المشتركة بينهما أي أن:

$$A \cap B = \{ x:\ x \in A \text{ و } x \in B\}$$



$A \cap B$

شكل 1.5

مثـــــال (17)

إذا كانت $A = \{1,3,5,7\}$ ، $B = \{1,2,3\}$ أوجد $A \cap B$

الحل

$$A \cap B = \{1,3\}$$

مثـــــال (18)

إذا كانت:

$$A = \{2,4,6,,8\}, \qquad B = \{1,2,3,4,5\}, \qquad C = \{3,5\}$$

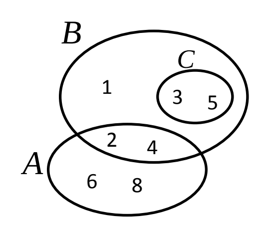
أوجد كلاً من: $A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C$

الحل

ملحوظة (5):
إذا كان $A \cap C = \phi$ فان المجموعتين منفصلتين أي أنه لا توجد بينهما عناصر مشتركة.

$A \cap B = \{2,4\}$
$A \cap C = \phi$
$B \cap C = \{3,5\}$

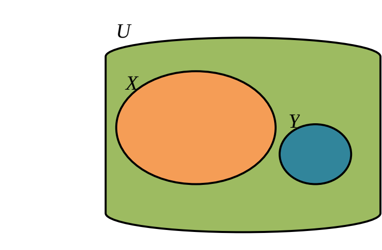
شكل 6.1 يمثل شكل فن للثلاث علاقات السابقة ويمكن الحصول عن نفس النتائج من الشكل.



شكل 1.6

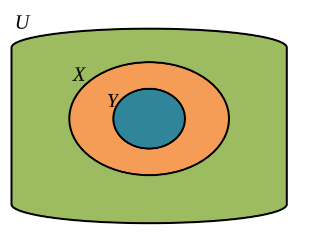
ومن خلال تعريف التقاطع، اذا كانت U هي المجموعة الشاملة وكانت كل من X, Y, Z مجموعات جزئية من U فإن:

$$(1) \quad X \cap X = X$$
$$(2) \quad X \cap \phi = \phi$$
$$(3) \quad X \cap Y = Y \cap X$$
$$(4) \quad X \cap U = X$$
$$(5) \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$



$X \cap Y = \phi$

شكل 1.7



$X \cap Y = Y$

شكل 1.8

العمليات على المجموعات (الفرق)

الفرق بين أي مجموعتين هو أن تنزع عناصر المجموعة الثانية من عناصر المجموعة الأولي وما يتبقى يكون هو الناتج.

(3) عملية طرح مجموعة من آخري (الفرق)

اذا كانت B , A مجموعتين غير خاليتين فإن:

- الفرق بين مجموعتين A, B

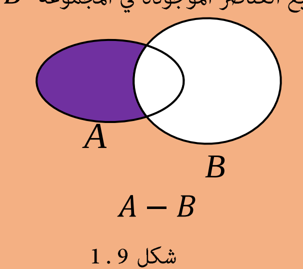
$$A - B = \{x : x \in A \ , \ x \notin B\}$$

هي مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة A ولا توجد في المجموعة B.

- الفرق بين مجموعتين B, A

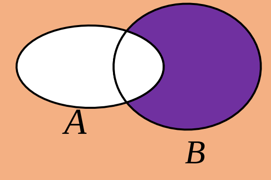
$$B - A = \{x : x \in B \ , \ x \notin A\}$$

هي جميع العناصر الموجودة في المجموعة B ولا توجد في المجموعة A.



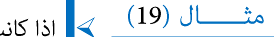
$A - B$

شكل 1.9



$B - A$

شكل 1.10



إذا كانت:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad B = \{1,3,5,7\}$$

فأوجد:

$$A - B,\ B - A$$

الحل

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{1,3,5,7\} = \{2,4,6\}$$
$$B - A = \{1,3,5,7\} - \{1,2,3,4,5,6\} = \{7\}$$

مثـــــال (20)

إذا كانت:

$$A = \{6,8,10,12\}, \qquad B = \{1,2,3,4,5\}, \qquad C = \{2,4,6,8\}$$

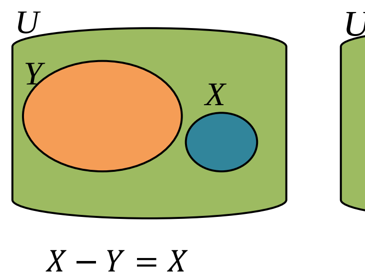
فأوجد:

$$A - B,\ B - A,\ B - C,\ C - B$$

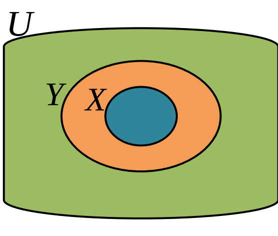
الحل

$$A - B = \{6,8,10,12\} - \{1,2,3,4,5\} = \{6,8,10,12\}$$
$$B - A = \{1,2,3,4,5\} - \{6,8,10,12\} = \{1,2,3,4,5\}$$
$$B - C = \{1,2,3,4,5\} - \{2,4,6,8\} = \{1,3,5\}$$
$$C - B = \{2,4,6,8\} - \{1,2,3,4,5\} = \{6,8\}$$

من خلال تعريف الفرق إذا كانت U هي المجموعة الشاملة وكانت كل من X, Y مجموعات جزئية من U فإنه يمكن رسم شكل فن شكل 11.1.



$$X - Y = X$$



$$X - Y = \phi$$

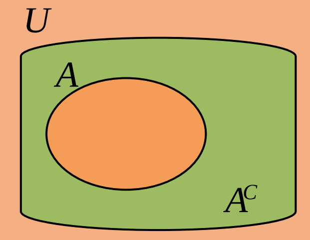

شكل 1 . 11

العمليات على المجموعات (الاتمام)

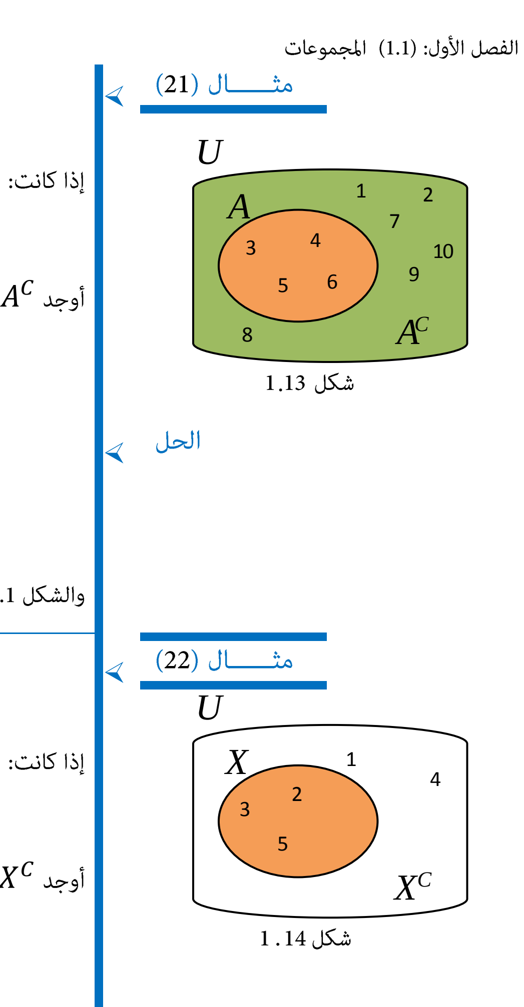
<u>(4) عملية الاتمام:</u>

إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U فإن $U - A$ هي المجموعة المتممة للمجموعة A ويرمز لها بالرمز A^C (أنظر الشكل 12.1) وتعرف كالتالي:

$$A^C = \{x : x \in U, \qquad x \notin A\}$$



شكل 1 . 12



مثـــال (21)

إذا كانت:

$$A = \{3,4,5,6\}, \qquad U = \{1,2,3,\cdots,10\}$$

أوجد A^C.

شكل 1.13

الحل

$$A^C = U - A$$
$$A^C = \{1,2,3,\cdots,10\} - \{3,4,5,6\}$$
$$= \{1,2,7,8,9,10\}$$

والشكل 13.1 يمثل شكل فن لهذا المثال.

مثـــال (22)

إذا كانت:

$$X = \{2,3,5\}, \qquad U = \{1,2,3,4,5\}$$

أوجد X^C.

شكل 1.14

الحل

$$X^C = U - X = \{1,2,3,4,5\} - \{2,3,5\} = \{1,4\}$$

والشكل 14.1 يمثل شكل فن لهذا المثال.

جبر المجموعات
(Algebra of Sets)

من خلال دراسة الخواص الأساسية للعمليات على المجموعات نجد أن:

(1) قانون التوزيع:

اذا كانت كل من A , B , C ثلاثة مجموعات فإن:

$$(1) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$(2) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(2) قوانين الوحدة

اذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U فإن:

$$(1) \quad A \cup U = U \qquad (2) \quad A \cup \phi = A$$
$$(3) \quad A \cap U = A \qquad (4) \quad A \cap \phi = \phi$$

(3) قوانين المكملة

اذا كانت A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U فإن:

$$(1) \quad A \cup A^C = U \qquad (2) \quad A \cap A^C = \phi$$
$$(3) \quad (A^C)^C = A \qquad (4) \quad \phi^C = U \qquad (5) \quad U^C = \phi$$

(4) قانونا دي مورجان

$$(1) \quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(2) \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

المجموعات العدديـــــة

هناك عدة من المجموعات العددية ولكل مجموعة خصائصها وهذه المجموعات كالتالي:

(1) **مجموعة الأعداد الطبيعية N (Natural Numbers):**

وهي مجموعة الأعداد الموجبة ما عدا الصفر ونرمز له بالرمز N، حيث:

$$\boldsymbol{N = \{1, 2, 3, \cdots\}}$$

(2) **مجموعة الأعداد الكلية W (Whole Numbers):**

وتأخذ الصورة

$$\boldsymbol{W = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}}$$

أي أنها مجموعة الأعداد الطبيعية مضافاً إليها عنصر الصفر وبالتالي يمكن كتابتها على الصورة:

$$\boldsymbol{W = N \cup \{0\}}$$

ملحوظة (6):

- الصفر ليس عدداً صحيحاً موجباً أو عدداً صحيحاً سالباً أي أن $0 \notin Z^{+}$ ، $0 \notin Z^{-}$
- توضع علامة (—) للتعبير عن الأعداد الصحيحة السالبة.

(3) مجموعة الأعداد الصحيحة Z (Integer Numbers):

وهي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة بالإضافة إلي الصفر ونرمز له بالرمز Z حيث:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

وبالتالي يمكن كتابتها على الصورة:

$$Z = Z^{+} \cup \{0\} \cup Z^{-} = W \cup Z^{-} = N \cup \{0\} \cup Z^{-}$$

ملحوظة (7):

التمثيل العشري للأعداد القياسية إما أن يكون منتهي أو أن يتكون غير منتهي ومتكرر فمثلاً: الكسر $\frac{8}{32}$ هو عدد قياس منتهي ويساوي عشرياً 0.25 والكسر $\frac{2}{5}$ هو عدد قياس منتهي ويساوي 0.4 والكسر $\frac{2}{3}$ هو عدد قياسي غير منتهي (متكرر) $0.666\overline{6}$ والكسر $\frac{2}{11}$ هو عدد قياسي غير منتهي (متكرر) ويساوي عشرياً $0.1818\overline{18}$ والعلامة $\overline{}$ تعني دوري أي تكرار الرقم إلى ما لا نهاية.

(4) مجموعة الأعداد القياسية (الكسرية أو النسبية) Q (Rational Numbers):

هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة كسر $\frac{a}{b}$ حيث a البسط، b المقام بشرط أن: $b \neq 0$ وبالتالي يمكن وضعها على الصورة:

$$Q = \left\{x : x = \frac{a}{b}, a, b \in z, b \neq 0\right\}$$

وبالتالي فإن كل عدد صحيح هو عدد نسبي مقامه الواحد الصحيح، وعلى ذلك يمكن القول بأن مجموعة الأعداد الصحيحة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد النسبية أي أن:

$$Z \subset Q$$

(5) مجموعة الأعداد الغير قياسية Q' (Irrational Numbers):

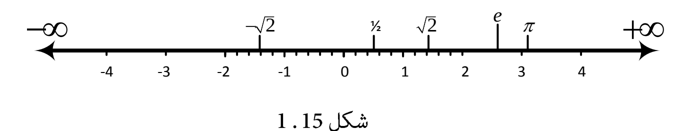
وهي مجموعة الأعداد التي لا يمكن كتابتها في صورة كسرية ونرمز له بالرمز و Q'، على سبيل المثال: كل الجذور الصماء: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \cdots$، وكذلك π, e حيث أن:

$$\sqrt{2} = 1.4142\cdots, \qquad \sqrt{3} = 1.7320\cdots,$$
$$e = 2.718\cdots, \qquad \pi = 3.1459\cdots$$

وكل القيم السابقة قيم تقريبية وليست قيم دقيقة.

(6) مجموعة الأعداد الحقيقية R (Real Numbers):

وهي مجموعة شاملة تحتوي كلا من الأعداد الطبيعية، والصحيحة، والقياسية، وغير القياسية ونرمز لها بالرمز R . الشكل التالي يمثل خط الأعداد موضحاً عليه بعض الأعداد الحقيقة.



شكل 1.15

ترتيب الأعداد الحقيقية
(Real Numbers Arrangement)

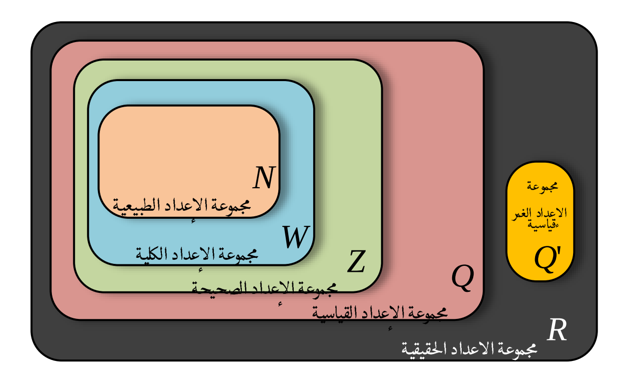
كلما اتجهنا يميناً على خط الأعداد الحقيقية زادت قيمة العدد، أي أنه إذا كان العدد a على يسار العدد b يعني ذلك أن العدد a أصغر من العدد b أو أن العدد b أكبر من العدد a وتكتب هذه العلاقة على الصورة:

$$a < b$$

ومثال ذلك:

$$-4 < 2, \qquad 3 < 7\,, \qquad -3 < -1$$

أما إذا كانت $a \geq b$ تقرأ a أكبر من أو يساوي b يعني $a > b$ أو $a = b$



شكل 1.16

ومن الشكل 11.1 يمكن استنتاج ما يلي:

(1) $N \subset W \subset Z \subset Q$
(2) $Q \cup Q' = R$
(3) $Q \cap Q' = \phi$

الفترات
(Intervals)

من خلال دراسة المجموعات نجد أن هناك بعض المجموعات لا يمكن حصر عناصرها لأننا نعلم انه بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الحقيقية بعضها أعداداً نسبية والأخرى أعداداً غير نسبية ولا يمكن تمثيلها على خط الأعداد ولذلك نستخدم طريقة أخرى للتعبير عن مثل هذه المجموعات وهي الفترات وهي عبارة عن مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقة وتنقسم إلى نوعين هما:

(1) الفترات المحدودة
(Finite Intervals)

إذا كانت $a, b \in R$ بحيث $a < b$ فإن الفترات المحدودة تنقسم إلى:

(أ) **<u>الفترة المغلقة (Closed Intervals)</u>** $[a, b]$ حيث تحتوي هذه الفترة على جميع الأعداد الحقيقية بين a, b بالإضافة إلى العددين a, b وتمثل الفترة على خط الأعداد كما بالشكل 18.1.

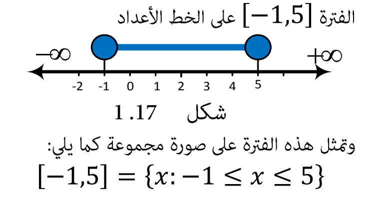


شكل 1.18

وتمثل الفترة على صورة مجموعة كما يلي:

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$$

الفترة $[-1,5]$ على الخط الأعداد

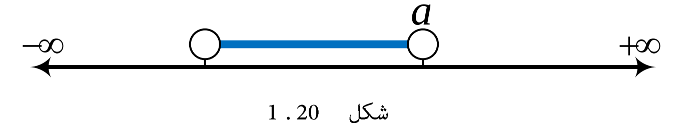


شكل 1.17

وتمثل هذه الفترة على صورة مجموعة كما يلي:

$$[-1,5] = \{x: -1 \leq x \leq 5\}$$

(ب) **<u>الفترة المفتوحة (Open Interval)</u>** (a, b): تشمل جميع الأعداد والتي بين a, b بدون a, b وتمثل الفترة على خط الأعداد في الشكل 20.1.

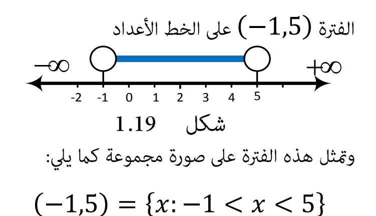


شكل 1.20

وصورة الفترة على هيئة المجموعة:

$$(a, b) = \{x:\ a < x < b\}$$

الفترة $(-1,5)$ على الخط الأعداد

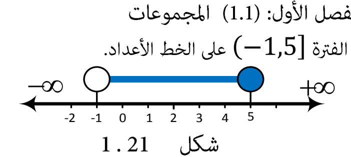


شكل 1.19

وتمثل هذه الفترة على صورة مجموعة كما يلي:

$$(-1,5) = \{x: -1 < x < 5\}$$

الفترة $(-1,5]$ على الخط الأعداد.



شكل 1.21

وتمثل هذه الفترة على صورة مجموعة كما يلي:

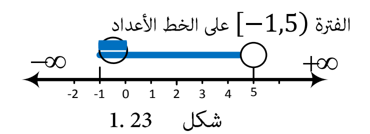
$$(-1,5] = \{x: -1 < x \leq 5\}$$

(ج) **الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة (Semi-Closed or Semi-Opened)** $(a, b]$: تحتوى هذه الفترة على جميع الأعداد الحقيقية بين a, b بالإضافة إلى العدد b أي أن:

$$(a,b] = \{x: a < x \leq b\}$$

شكل 1. 22

الفترة $[-1,5)$ على الخط الأعداد.



شكل 1. 23

وتمثل هذه الفترة على صورة مجموعة كما يلي:

$$[-1,5) = \{x: -1 \leq x < 5\}$$

(د) <u>**الفترة نصف مفتوحة أو النصف مغلقة (Semi-Opened or Semi-Closed)** $[a,b)$</u>: وتحتوى هذه الفترة على جميع الأعداد الحقيقية بين a, b إضافة إلى العدد a أي أن:

$$[a, b) = \{x: a \leq x < b\}$$



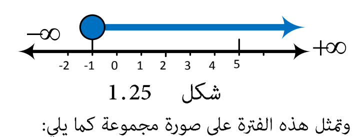
شكل 1. 24

(2) الفترات غير المحدودة

(Infinite Intervals)

هي الفترات التي يحتوي أحد طرفيها أو كلاهما على ∞ أو $-\infty$ وبالتالي لا يوجد فترات مغلقة في هذه الحالة وتنقسم إلى:

الفترة $[-1, \infty)$ على الخط الأعداد.



شكل 1.25

وتمثل هذه الفترة على صورة مجموعة كما يلي:

$$[-1, \infty) = \{x: x \geq -1\}$$

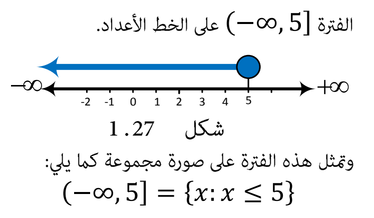
(أ) <u>**الفترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة (Semi-Opened or Semi-Closed)** $[a, \infty)$</u>: وهي تشمل على جميع الأعداد الحقيقية التي أكبر من a وبالإضافة إلى a أي أن:

$$[a, \infty) = \{x: x \geq a\}$$



شكل 1.26

الفترة $(-\infty, 5]$ على الخط الأعداد.



شكل 1.27

وتمثل هذه الفترة على صورة مجموعة كما يلي:

$$(-\infty, 5] = \{x: x \leq 5\}$$

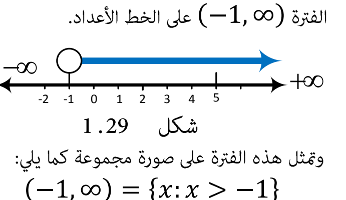
(ب) <u>**الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة (Semi-Closed or Semi-Opened)** $(-\infty, b]$</u>: وهي تشمل على جميع الأعداد الحقيقية التي أقل من b إضافة إلى b أي أن:

$$(-\infty, b] = \{x: x \leq b\}$$



شكل 1.28

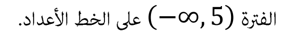
الفترة $(-1,\infty)$ على الخط الأعداد.



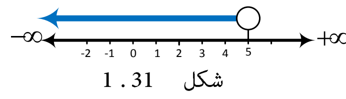
شكل 1.29

وتمثل هذه الفترة على صورة مجموعة كما يلي:

$$(-1,\infty)=\{x: x>-1\}$$



الفترة $(-\infty,5)$ على الخط الأعداد.



شكل 1.31

وتمثل هذه الفترة على صورة مجموعة كما يلي:

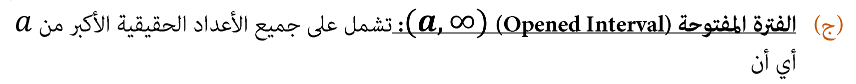
$$(-\infty,5)=\{x: x<5\}$$

ملحوظة (8):

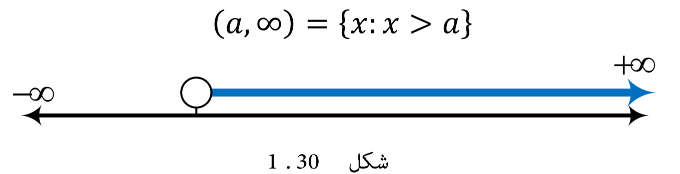
الفترة المفتوحة $(-\infty,\infty)$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية أي أن:

$$R=(-\infty,\infty)$$

(ج) **الفترة المفتوحة (Opened Interval) (a,∞):** تشمل على جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من a أي أن



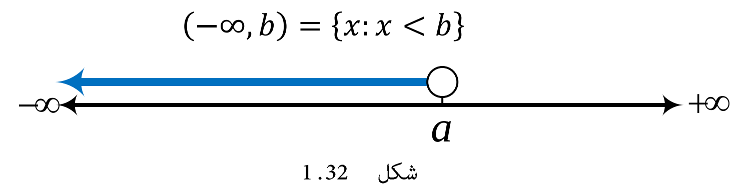
$$(a,\infty)=\{x: x>a\}$$



شكل 1.30

(د) **الفترة المفتوحة (Opened Interval) $(-\infty,b)$:** تحتوي على جميع الأعداد الحقيقية الأقل من b أي أن:

$$(-\infty,b)=\{x: x<b\}$$



شكل 1.32

يمكن توضيح انواع الفترات في الجدول الآتي حيث أن: $a,b\in R$، $a<b$

نوع الفترة		الفترة	التعبير عن الفترة بطريقة المجموعة	تمثيلها على خط الأعداد	لاحظ أن
الفترات المحدودة	المفتوحة	(a,b)	$\{x: a<x<b, x\in R\}$	a −∞ +∞	$a\notin(a,b)$ $b\notin(a,b)$
	المغلقة	$[a,b]$	$\{x: a\le x\le b, x\in R\}$	a −∞ +∞	$a\in[a,b]$ $b\in[a,b]$
	نصف المفتوحة	$(a,b]$	$\{x: a<x\le b, x\in R\}$	a −∞ +∞	$a\notin(a,b]$ $b\in(a,b]$
		$[a,b)$	$\{x: a\le x<b, x\in R\}$	a −∞ +∞	$a\in[a,b)$ $b\notin[a,b)$
الفترات الغير محدودة		(a,∞)	$\{x: x>a, x\in R\}$	−∞ +∞	$a\notin(a,\infty)$
		$[a,\infty)$	$\{x: x\ge a, x\in R\}$	−∞ +∞	$a\in[a,\infty)$
		$(-\infty,b]$	$\{x: x\le b, x\in R\}$	a −∞ +∞	$b\in(-\infty,b]$
		$(-\infty,b)$	$\{x: x<b, x\in R\}$	a −∞ +∞	$b\notin(-\infty,b)$

مثـــــال (23)

وضح كلاً من المجموعات الآتية على خط الأعداد وعلى صورة فترة:

(1) $\{x: -3 \leq x < 0, x \in R\}$

(2) $\{x: -2 \leq x \leq 1, x \in R\}$

(3) $\{x: x \leq -1, x \in R\}$

(4) $\{x: 0 < x, x \in R\}$

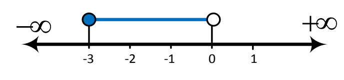
الحل

(1) $\{x: -3 \leq x < 0, x \in R\}$

على صورة فترة

$$\{x: -3 \leq x < 0, x \in R\} = [-3,0)$$

تمثيل المجموعة على خط الأعداد:



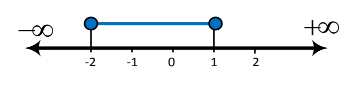
شكل 1 . 33

(2) $\{x: -2 \leq x \leq 1, x \in R\}$

على صورة فترة

$$\{x: -2 \leq x \leq 1, x \in R\} = [-2,1]$$

تمثيل المجموعة على خط الأعداد:



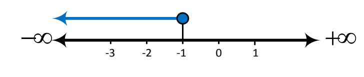
شكل 1 . 34

(3) $\{x: x \leq -1, x \in R\}$

على صورة فترة

$$\{x: x \leq -1, x \in R\} = (-\infty, -1]$$

تمثيل المجموعة على خط الأعداد:



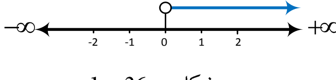
شكل 1 . 35

(4) $\{x: 0 < x, x \in R\}$

على صورة فترة

$$\{x: 0 < x, x \in R\} = (0, \infty)$$

تمثيل المجموعة على خط الأعداد:



شكل 1 . 36

مثـــــال (24)

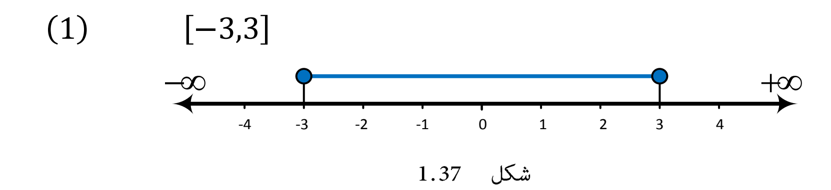
مثل كلاً من الفترات التالية على خط الأعداد

(1) $[-3,3]$
(2) $(-1,2)$
(3) $(-\infty,5]$

الحل

(1) $[-3,3]$

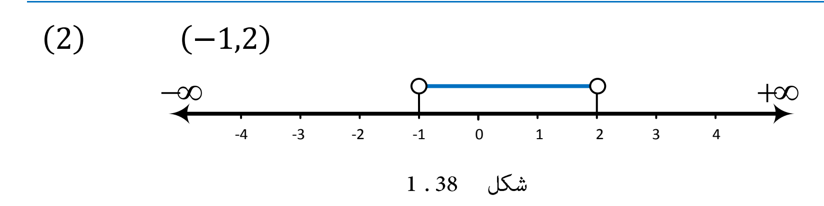
لاحظ أن هذه الفترة محدودة ومغلقة من كلا الطرفين



شكل 1.37

(2) $(-1,2)$

لاحظ أن هذه الفترة محدودة ومفتوحة من كلا الطرفين



شكل 1 . 38

(3) $(-\infty,5]$

لاحظ أن هذه الفترة غير محدودة.



شكل 1 . 39

العمليات على الفترات
Interval Arithmetic

تخضع الفترات إلى عمليات عديدة مثل المجموعات من الاتحاد والتقاطع والفرق بين فترتين والمكملة، وسوف نركز على بعض تلك العمليات مثل الاتحاد والتقاطع وذلك من خلال الأمثلة التالية.

مثـــــال (25)

اوجد اتحاد الفترتين $[-3,3], (-1,5)$ على صورة فترة وعلى صورة مجموعة ووضح ذلك على خط الأعداد.

الحل

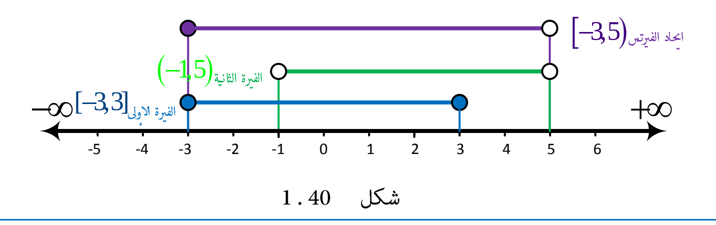
يعرف أن اتحاد المجموعات أو الفترات هو جميع عناصر الفترات بدون تكرار عنصر، وعلى ذلك فإن اتحاد الفترتين هي الفترة:

$$[-3,3] \cup (-1,5) = [-3,5)$$

وبالتالي فإن الفترة الناتجة على صورة مجموعة تكون:

$$[-3,3] \cup (-1,5) = \{x: -3 \le x < 5\}$$

ويمكن تمثيل ذلك على خط الأعداد بالشكل 40.1 .



شكل 1 . 40

مثـــــال (26)

عبر عن اتحاد الفترتين $[-2,3], [0,2]$ على صورة فترة وعلى صورة مجموعة ووضح ذلك على خط الأعداد.

الحل

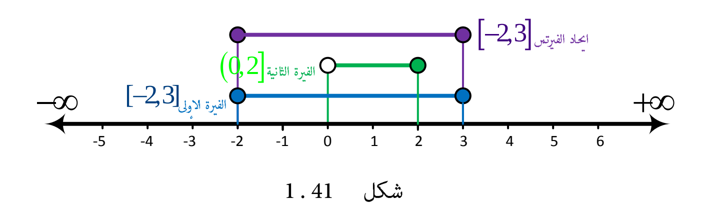
نوجد اتحاد الفترتين على صورة فترة كالتالي:

$$[-2,3] \cup (0,2] = [-2,3]$$

وعلى صورة مجموعة:

$$[-2,3] \cup (0,2] = \{x: -2 \le x \le 3\}$$

وأخيراً تمثيل ذلك على خط الأعداد بالشكل 41.1:



شكل 1 . 41

مثـــــال (27)

اوجد تقاطع الفترتين $[-1,3], (-\infty, 2)$ وذلك على صورة فترة ومجموعة ومثل ذلك على خط الأعداد.

الحل

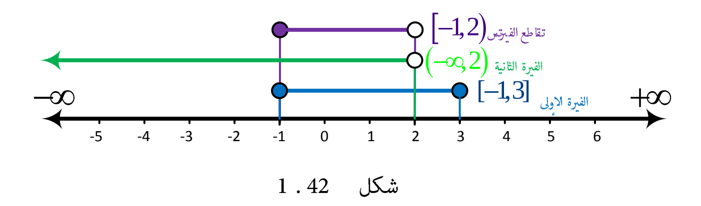
يعرف تقاطع فترتين على أنه العناصر المشتركة بينهما، وعلى ذلك فإن:

$$[-1,3] \cap (-\infty, 2) = [-1,2)$$

ويمكن كتابة ذلك على صورة مجموعة كالتالي:

$$[-1,3] \cap (-\infty, 2) = \{x: -1 \le x < 2\}$$

وتمثيل ذلك على خط الأعداد بالشكل 42.1:



شكل 1 . 42

مثـــــال (28)

عبر عن تقاطع الفترتين $[-1,3], (-\infty, 1)$ على صورة فترة وعلى صورة مجموعة ثم بين ذلك على خط الأعداد.

الحل

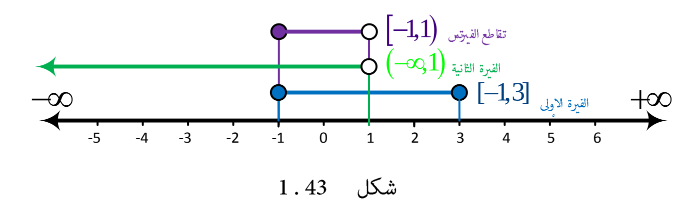
أولاً نوجد تقاطع الفترتين على صورة فترة:

$$[-1,3] \cap (-\infty, 1) = [-1,1)$$

ثانياً نوجد التقاطع على صورة مجموعة:

$$[-1,3] \cap (-\infty, 1) = \{x: -1 \le x < 1\}$$

وأخيراً يتم تمثيل ذلك على خط الأعداد بالشكل 43.1:



شكل 1 . 43

القيمة المطلقة

Absolute Value

تعرف القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي x بأنها المسافة بين x والصفر ويرمز لها بالرمز $|x|$ التي تعرف كما يلي:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

أي أن القيمة المطلقة تحول القيم السالبة إلى موجبة والموجبة تظل كما هي، أمثلة ذلك:

$$|5| = 5 \quad , \quad |-5| = 5$$
$$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad , \quad \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$
$$|\sqrt{7}| = \sqrt{7} \quad , \quad |-\sqrt{7}| = \sqrt{7}$$

وبالتالي المسافة بين القيمة x والصفر تساوي المسافة بين الصفر والقيمة $-x$.

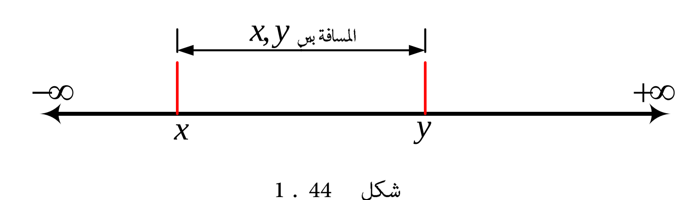
المسافة بين عددين على خط الأعداد

Distance between two Numbers on Line Numbers

إذا كان لدينا العددين x, y فإن المسافة بينهما تقدر بالقيمة المطلقة كما يلي:

$$d(x,y) = |x - y|$$

ويعبر عنها بوحدات الطول.



شكل 1 . 44

ملحوظة (9):

المسافة بين x, y هي نفس المسافة بين y, x أي أن:

$$d(x,y) = d(y,x)$$

وذلك لأن:

$$|x - y| = |y - x|$$

مثـــــال (29)

إذا كان $x = -2$ ، $y = 6$ برهن على أن:

$$|x - y| = |y - x|$$

الحل

$$d(x,y) = |x - y| = |-2 - 6| = |-8| = 8$$
$$d(y,x) = |y - x| = |6 + 2| = |8| = 8$$
$$\therefore d(x,y) = d(y,x)$$

مثـــــال (30)

أوجد المسافة بين العددين $-1, -6$.

الحل

$$d(-1,-6) = |-1-(-6)| = |-1+6| = |5| = 5$$

وحدة طول.



شكل 1 . 45

الاختبار الذاتي (1)

Self-Test (1)

.1 اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) رتبة المجموعة $X = \{a, b, c\}$ هي

a. 0 b. 1 c. 3

(ب) العنصر 1 لا ينتمي إلى:

a. N b. $\{1,2\}$ c. $\{\{1\},\{0,2\}\}$

(ج) العنصر $\{2\}$ ينتمي إلى:

a. R b. $\{\{2\},\{1,3\}\}$ c. $\{1,2\}$

(د) إذا كانت المجموعة $X = \{1,2,3\}$ فإن عدد المجموعات الجزئية منها هو

a. 8 b. 6 c. 5

.2 إذا كانت $A = \{1,2,3,4,5,6\}$، $B = \{1,3,5\}$، $C = \{2,4,6\}$ فإن:

(أ) $A \cup B$ يساوي:

a. A b. B c. $\{1,3,5,6,7\}$

(ب) $A \cap B$ يساوي:

a. A b. B c. $\{1,2,3\}$

(ج) $A \cap B \cap C$ يساوي:

a. A b. B c. ϕ

(د) $A - C$ يساوي:

a. C b. B c. A

(هـ) $B - C$ يساوي:

a. B b. ϕ c. C

3. القيمة المطلقة للعدد $-\frac{1}{4}$ هي:

a. $\frac{1}{4}$ b. 4 c. -4

4. المسافة بين العددين $1, -2$ على خط الأعداد هي:

a. 2 b. 3 c. 5

5. الفترة $[-2,3]$ على صورة مجموعة

a. $\{x: -2 \leq x \leq 3\}$ b. $\{x: -2 \leq x < 3\}$ c. $\{x: -2 < x < 3\}$

6. $[-1,3] \cup (0,4]$

a. $[-1,4]$ b. $[-1,0)$ c. $[3,4)$

7. $(-\infty, 3] \cap (-1, \infty)$

a. $(-\infty, -1)$ b. $[3, \infty)$ c. $(-1,3]$

تمـــــــارين
Exercises

1. أعد كتابة المجموعات الآتية بطريقة السرد

a. $A = \{x : x$ عدد طبيعي فردي$\}$

b. $B = \{x : x$ حرف من حروف كلمة مصر$\}$

c. $C = \{x : x$ العدد أكبر من 2 وأقل من 10$\}$

d. $D = \{x : x$ العدد الذي يقبل القسمة على 36$\}$

2. اختر الإجابة الصحيحة:

(أ) العنصر -1 ينتمي إلى:

a. N b. Z c. $\{1,2\}$

(ب) رتبة المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$ هي

a. 4 b. 3 c. 2

(ج) المجموعة $\{0,1,2,3\}$ مجموعة جزئية من المجموعة

a. N b. W c. $\{2,4,6,8\}$

(د) العنصر $\{-1\}$ ينتمي إلى

d. R e. Z f. $\{\{-1\}, \{0,1\}\}$

3. أوجد القيمة المطلقة لكل من

$$-\frac{4}{7}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad 1$$

4. أوجد المسافة بين -3 وكل من الأعداد

$$1, \quad 4, \quad -1, \quad 5$$

5. اكتب الفترات الآتية في صورة مجموعة ثم مثلها على خط الأعداد الحقيقية

a. $(-3,7]$ b. $[-3,-1]$ c. $[4,6]$

d. $(-5,-1)$ e. $(-\infty,5]$ f. $(-2,\infty)$

---

6. مثل اتحاد الفترتين على خط الأعداد ثم على صورة فترة

a. $(-2,3], [0,4)$ b. $[-2,3), (-\infty,2]$

---

7. مثل تقاطع الفترتين على خط الأعداد ثم على صورة مجموعة

a. $[-2,4], (3,6]$ b. $(-\infty,4), [0,\infty)$

---

8. إذا كانت $A = \{1,2,3,\cdots 10\}$ ، $B = \{1,3,5,7,9\}$ اوجد:

a. $A \cup B$ b. $A \cap B$ c. $B - A$ d. $A - B$

---

9. إذا كانت U هي المجموعة الشاملة حيث $U = \{2,4,6,\cdots,20\}$ وكانت $A = \{4,6,8,10\}$ وكانت B هي مجموعة الأعداد التي تقبل القسمة على العدد 5 وأقل من 20 أوجد كلا من:

$$A^C, \qquad B^C$$

الباب الأول

مفاهيم جبرية



الفصل الثاني

العمليات

على الأعداد الحقيقية

الفصل الثاني : العمليات على الأعداد الحقيقية

محتويات الفصل

الفصل الثاني: العمليات على الأعداد الحقيقية

Section (2): Operations on Real Numbers

أولاً: خصائص الأعداد الحقيقية

(Real Numbers Properties)

يجب توضيح بعض الخصائص للأعداد الحقيقية، إذا كان لدينا a, b, c ثلاث أعداد حقيقية فهناك بعض الخواص التي تتمتع بها مجموعة الأعداد الحقيقية.

(أ) **خاصية الانغلاق (Closure)** (تعني أن جمع أو ضرب أي عددين حقيقتين هو عدد حقيقي) أي أن $\forall \; a, b \in R$ لدينا:

$$a + b \in R, \qquad ab \in R$$

(ب) **خاصية الإبدال (Commutativity):** الجمع والضرب عمليتان تبديليتان ويعني هذا إمكانية عكس أماكن الحدود ويظل الناتج كما هو أي أن:

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba$$

(ج) **خاصية الدمج أو التجميع (Associativity):**

$$(ab)c = a(bc)$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(د) **العنصر المحايد الجمعي (الصفر) (Identity Element):** يسمى الصفر العنصر الحيادي للجمع لأنه إذا جمع مع أي عدد آخر يكون الناتج هو العدد نفسه

$$a + 0 = 0 + a = a$$

(هـ) **العنصر المحايد الضربي (الواحد) (Identity Element):** يسمى الواحد العنصر الحيادي للضرب لأنه إذا ضرب في أي عدد آخر يكون الناتج هو العدد نفسه

$$(a)(1) = (1)(a) = a$$

(و) **المعكوس الجمعي (Additive Inverse):** هو العدد الذي إذا جمع مع عدد آخر يعطي المحايد الجمعي أي (الصفر) أي أن:

$$a + (-a) = 0,$$
$$5 + (-5) = 0, \qquad \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0, \qquad \sqrt{5} + \left(-\sqrt{5}\right) = 0.$$

(ز) **المعكوس الضربي (Multiplicative Inverse):** هو العدد الذي إذا ضرب في عدد آخر يعطي المحايد الضربي (الواحد) أي أن:

$$(a)\left(\frac{1}{a}\right) = 1, \qquad a \neq 0$$

لاحظ أن العدد a لا يساوي الصفر وبالتالي يعرف المعكوس الضربي بمقلوب العدد a.

(ح) ضرب الصفر في أي عدد (Multiply by Zero): ضرب الصفر في أي عدد يعطي الصفر، أي أن:

$$(a)(0) = (0)(a) = 0$$



البيروني

هو أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني ولد في خوارزم (روسيا) سنة (362 هـ – 973 م) وقد وصف ياقوت الحموي تراث البيروني بأنه كان يفوق حمل بعير ويعد هذا العالم من أعظم العلاء الموسوعيين على مدى العصور، وتوفي - رحمه الله – ببغداد سنة (443هـ – 1051م) وينسب البيروني إلى بلدة بيرون (باكستان)، وقدرت مؤلفاته بنحو 180 مؤلفاً (كتاب - مقال – رسالة)، واشتهر في مجال الرياضيات بعلم حساب المثلثات.

ومن أهم مؤلفاته: استخراج الأوتار في الدائرة بخواص الخط المنحني الواقع فيها.

ثانيا: العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية

(Algebraic Operations)

هناك أربع عمليات أساسية يمكن اجرائها على الأعداد الحقيقية وهي الجمع والطرح والضرب والقسمة.

(أ) **عملية الجمع (Addition):** قبل البداية يجب توضيح قاعدة الإشارات كما يلي:

- العددان موجبان: نجمع ونضع نفس الإشارة $(+) + (+) = +$
- العددان سالبان: نجمع ونضع نفس الإشارة $(-) + (-) = -$
- مختلفي الإشارة: نطرح ونضع إشارة الأكبر $(+) + (-) =$
- مختلفي الإشارة: نطرح ونضع إشارة الأكبر $(-) + (+) =$

من خلال ذلك نجد أن:

- إذا تشابهت إشارتي العددين نجمع العددين ونضع نفس الإشارة.
- إذا اختلفت إشارتي العددين نطرح العددين ونضع إشارة العدد الأكبر.

مثــــال (1)

أوجد ناتج كلاً مما يأتي:

$(1)\quad 3 + 7 =$ $\qquad (2)\quad -3 - 1 =$

$(3)\quad -4 + 1 =$ $\qquad (4)\quad -10 + 8 =$

الحل

$(1)\quad 3 + 7 = 10$ $\qquad (2)\quad -3 - 1 = -4$

$(3)\quad -4 + 1 = -3$ $\qquad (4)\quad -10 + 8 = -2$

(ب) **عمليتا الضرب والقسمة (Multiplication, Division):** يجب توضيح قاعدة الإشارات لعمليتا الضرب والقسمة كما يلي:

$$(+) \times (+) = +, \qquad \frac{(+)}{(+)} = +$$

$$(-) \times (-) = +, \qquad \frac{(-)}{(-)} = +$$

$$(+) \times (-) = -, \qquad \frac{(+)}{(-)} = -$$

$$(-) \times (+) = -, \qquad \frac{(-)}{(+)} = -$$

وبالتالي عند الضرب أو القسمة إذا كانت:

- الإشارات متشابهة فإن الإشارة الناتجة موجبة.
- الإشارات مختلفة فإن الإشارة الناتجة سالبة.

ملحوظة (1)
عند إجراء عمليات جبرية لمسائل تحتوي على جمع وضرب وغيرهما يجب إجراء عملية الضرب أولاً ثم إجراء الجمع والطرح ثانياً.

مثـــــال (2)

لاحظ ناتج العمليات التالية:

(1) $(3) \times (5) = +15$

(2) $(-4) \times (-3) = +12$

(3) $(5) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$

(4) $(-2) \times (7) = -14$

(5) $(25) \div (5) = +5$

$(-24) \div (6) = -4$

مثـــــال (3)

أوجد ناتج العمليات التالية:

1. $6 + 2 \times 3 - 15 \div 3$
2. $12 \times 2 - 5 \times 2$
3. $-50 \div 5 + 3 \times 3$
4. $-3 + 4 \times 2 - 5$

الحل

1. $6 + 2 \times 3 - 15 \div 3 = 6 + (2 \times 3) - (15 \div 3)$
$= 6 + (6) - (5) = 12 - 5 = 7$

2. $12 \times 2 - 5 \times 2 = (12 \times 2) - (5 \times 2)$
$= (24) - (10) = 14$

3. $-50 \div 5 + 3 \times 3 = (-50 \div 5) + (3 \times 3)$
$= (-10) + (9) = -10 + 9 = -1$

4. $-3 + 4 \times 2 - 5 = -3 + (4 \times 2) - 5$
$= -3 + (8) - 5 = -8 + 8 = 0$

مثـــــال (4)

أوجد ناتج العمليات التالية:

1. $-4 \times 6 \div 4 \div 3$
2. $45 \div 9 \times 3 \div 5$
3. $15 \div 3 \times 2 \div (-5)$

الحل

1. $-4 \times 6 \div 4 \div 3 = -24 \div 4 \div 3 = -6 \div 3 = -2$
2. $45 \div 9 \times 3 \div 5 = 5 \times 3 \div 5 = 15 \div 5 = 3$
3. $15 \div 3 \times 2 \div (-5) = 5 \times 2 \div -5 = 10 \div (-5) = -2$

ملحوظة (2)
إذا احتوت العملية الجبرية على الضرب الجبري فقط فإننا نجري العملية حسب ظهورها من اليسار إلى اليمين

مثـــــال (5)

أوجد ناتج العمليات التالية:

1. $\{25 \div (8-3) + 7\} \div 6$
2. $[\{(6 \times 4) + (15 \div 3)\} + 3] \div 8$

الحل

1. $\{25 \div (8-3) + 7\} \div 6 = \{25 \div 5 + 7\} \div 6$
$= \{5 + 7\} \div 6 = 12 \div 6 = 2$

2. $[\{(6 \times 4) + (15 \div 3)\} + 3] \div 8 = [\{24 + 5\} + 3] \div 8$
$= [29 + 3] \div 8 = 32 \div 8 = 4$

ملحوظة (3)
إذا احتوت العملية الجبرية على أقواس فإننا نجري العملية أولاً على الأقواس الداخلية ثم الخارجية على الترتيب.

ثالثاً: العمليات على الكسور الاعتيادية

تعرف الكسور على أنها الكميات العددية التي تُعبَر عن العلاقات الرياضية بين الجزء (أو لأجزاء) والمجموعة الكاملة.وتكون علي صورة بسط ومقام (a/b)

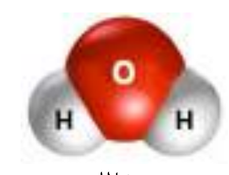
مثـــــال (6)

يَنتُج الماء عندما يتحد الهيدروجين مع الأكسجين. ويتم اتحاد ذرتين من الهيدروجين مع ذرة واحدة من الاكسجين لينتج عندئذ جزيء ماء واحد. عبر عن ذلك بالكسور الاعتيادية.

الحل

الكسر $\frac{1}{3}$ يُعبِر عن الجزء (ذرة أكسجين واحدة) من الكُل (جزيء الماء) المكون من ثلاث ذرات.

والكسر $\frac{2}{3}$ يُعبِر عن الأجزاء (ذرتي هيدروجين) من الكل (جزيء الماء) المكون من 3 ذرات.

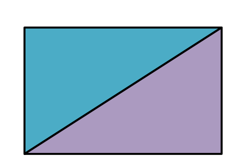


جزئ الماء

مثـــــال (7)

كم مثلثاً تُشاهد في الشكل المجاور؟

الحل



الكسر $\frac{1}{2}$ يُعبر عن جزء واحد (مثلث) من الكُل الصحيح المقسم إلى جزئين (مثلثن) .

بالتالي يمكن تعريف الكسر بالصيغة الرياضية على أنه عبارة عن بسط ومقام ويكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث أن:

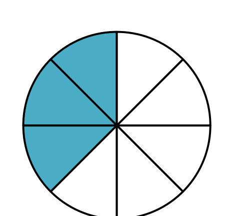
$$b \neq 0, \qquad a, b \in R$$

فمثلاً:

$$\frac{4}{5}, \quad -\frac{3}{7}, \quad -\frac{10}{5}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}$$

مثـــال (8)

أوجد الكسر المظلل من الشكل.



الحل

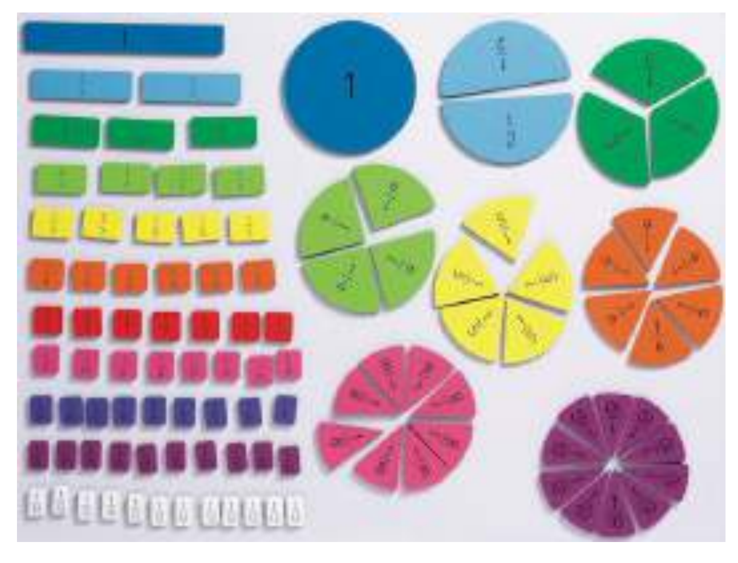
عدد جميع أجزاء الشكل يساوي 8 وعدد الأجزاء المظللة يساوي 3 وبالتالي فإن الكسر يساوي:

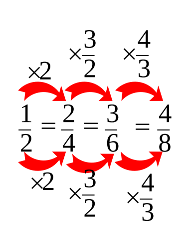
$$\frac{3}{8} = \frac{\text{عدد الأجزاء المظللة}}{\text{عدد جميع أجزاء الشكل}}$$

الكسور المتكافئة

(Equivalent Fractions)

فيما يلي اشكال متطابقة قسمت بطرق مختلفة





وبالتالي تكافؤ الكسور هو عبارة عن تساوي الكسور ويعني صور مختلفة للكسر بحيث أنه إذا قسمنا البسط والمقام على عدد ثابت فإننا نحصل على الكسر المكافئ للكسر المعطى، فمثلاً الكسر $\frac{1}{2}$ يكافئ الكسور

وكذلك في حالة ضرب البسط والمقام في عدد ثابت نحصل على الكسر المكافئ

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{1\times 4}{2\times 4} = \cdots$$

والكسر $\frac{3}{5}$ يكافئ الكسور

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20}$$

والكسر $\frac{50}{60}$ يكافئ الكسور

$$\frac{50}{60} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

نلاحظ أن الواحد يكافئ كسراً يكون فيه عدد البسط هو نفس عدد المقام:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$$
$$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}$$
$$1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}$$
$$1=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}$$
$$1=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{12}{12}$$

مثـــــال (9)

أياً من الكسور الآتية تمثل كسوراً متكافئة:

$1.\ \frac{3}{4},\frac{6}{8},\frac{12}{14}$ $\quad 2.\ \frac{3}{5},\frac{5}{7},\frac{9}{15}$ $\quad 3.\ \frac{3}{8},\frac{6}{16},\frac{12}{32}$ $\quad 4.\ \frac{5}{10},\frac{10}{15},\frac{1}{2}$

الحل

1. $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\neq\frac{12}{14}$ لا تمثل كسوراً متكافئة

2. $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}\neq\frac{5}{7}$ لا تمثل كسوراً متكافئة

3. $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}=\frac{12}{32}$ تمثل كسوراً متكافئة

4. $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\neq\frac{10}{15}$ لا تمثل كسوراً متكافئة

تبسيط الكسور
(Simplifying Fractions)

هو الحصول على أبسط صورة للكسر بحيث لا يمكن قسمة بسطه ومقامه على عدد غير الواحد.

مثـــــال (10)

ضع الكسورالتالية في أبسط صورة:

$$\frac{16}{17},\quad \frac{14}{30},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{5}{15}$$

الحل

الكسر الأول: بقسمة كل من البسط والمقام على العدد 5 ينتج أبسط صورة للكسر وهي:

$$\frac{\overbrace{5}^{\div 5=1}}{\underbrace{15}_{\div 5=3}}=\frac{1}{3}$$

الكسر الثاني: لا يمكن قسمة كلاً من البسط والمقام سوى على الواحد وبالتالي فإن أبسط صورة للكسر هي:

ملحوظة (4)
يمكن إجراء أكثر من عملية للحصول على أبسط صورة، فمثلاً

$$\frac{\overbrace{24}^{\div 2=12}}{\underbrace{16}_{\div 2=8}}=\frac{\overbrace{12}^{\div 4=3}}{\underbrace{8}_{\div 4=2}}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

الكسر الثالث: بقسمة كل من البسط والمقام على العدد 2 تنتج أبسط صورة للكسر وهي:

$$\frac{\overbrace{14}^{\div 2=7}}{\underbrace{30}_{\div 2=15}}=\frac{7}{15}$$

الكسر الرابع: لا يمكن قسمة كلاً من البسط والمقام سوى على الواحد وبالتالي فإن أبسط صورة للكسر هي:

$$\frac{16}{17}$$

المقارنة بين الكسور
(Comparing Fractions)

مقارنة الكسور هي عملية مشابهة لمقارنة الأعداد العادية اي وضع الرموز $<$ أو $>$ أو $=$ بين كسرين ليؤشر فيما كان العدد الاول (اصغر او اكبر او يساوي) العدد الثاني، كما ان هذه العملية مهمة في ترتيب الكسور، فاذا كان لدينا ٤ كسور مختلفين، يمكننا ترتيبهم تصاعدياً من الاصغر للأكبر أو تنازلياً من الأكبر للأصغر عن طريق معرفة أيهم الأكبر قيمة وهكذا. وللمقارنة بين كسرين نلاحظ المقام أولاً وهناك حالتان:

(أ) إذا كان لدنيا الكسرين $\frac{a}{c},\frac{b}{c}$ في هذه الحالة يكون المقام متساوي فان المقارنة تكون بين البسط فقط أي نقارن العددين a,b.

(ب) إذا كان لدنيا الكسرين $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ في هذه الحالة يكون المقام مختلف وبالتالي نوجد طريقة لتوحيد مقامي الكسرين $\left(\frac{ad}{bd},\frac{cb}{bd}\right)$ ثم نجري عملية المقارنة بين بسطي الكسرين.

مثـــــال (11)

ضع العلامة المناسبة $(=,>,<)$

1. $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ 2. $-\frac{1}{7},-\frac{3}{7}$ 3. $\frac{5}{9},\frac{3}{9}$ 4. $-\frac{1}{4},-\frac{2}{8}$

الحل

1. $\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ 2. $-\frac{1}{7}>-\frac{3}{7}$ 3. $\frac{5}{9}>\frac{3}{9}$ 4. $-\frac{1}{4}=-\frac{2}{8}$

مثـــــال (12)

قارن بين كل كسرين من الكسور التالية:

1. $\frac{2}{3},\frac{3}{4}$ 2. $-\frac{2}{5},-\frac{4}{7}$ 3. $-\frac{1}{5},-\frac{1}{4}$ 4. $-\frac{4}{5},-\frac{3}{8}$

الحل

الجزء الأول: نلاحظ أن المقام المشترك للكسرين هو ناتج العملية (3×4) وبالتالي فإن:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 4}{3\times 4}=\frac{8}{12},\qquad \frac{3}{4}=\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{9}{12}\therefore \frac{9}{12}>\frac{8}{12}\Rightarrow \frac{3}{4}>\frac{2}{3}$$

الجزء الثاني: نلاحظ أن المقام المشترك للكسرين هو ناتج العملية (7×5) وبالتالي فإن:

$$-\frac{2}{5}=\frac{-2\times 7}{5\times 7}=-\frac{14}{35},\qquad -\frac{4}{7}=-\frac{4\times 5}{7\times 5}=-\frac{20}{35}$$

$$\therefore -\frac{14}{35}>-\frac{20}{35}\Rightarrow -\frac{2}{5}>-\frac{4}{7}$$

الجزء الثالث: نلاحظ أن المقام المشترك للكسرين هو ناتج العملية (4×5) وبالتالي فإن:

$$-\frac{1}{5}=-\frac{1\times 4}{5\times 4}=-\frac{4}{20},\qquad -\frac{1}{4}=-\frac{1\times 5}{4\times 5}=-\frac{5}{20}$$

$$\therefore -\frac{4}{20}>-\frac{5}{20}\Rightarrow -\frac{1}{5}>-\frac{1}{4}$$

الجزء الرابع: نلاحظ أن المقام المشترك للكسرين هو ناتج العملية (8×5) وبالتالي فإن:

$$-\frac{4}{5}=-\frac{4\times 8}{5\times 8}=-\frac{32}{40},\qquad -\frac{3}{8}=-\frac{3\times 5}{8\times 5}=-\frac{15}{40}$$

$$\therefore -\frac{15}{40}>-\frac{32}{40}\Rightarrow -\frac{3}{8}>-\frac{4}{5}$$

جمع وطرح الكسور
(Adding & Subtracting Fractions)

هناك حالتان لجمع وطرح الكسور

(أ) إذا كان الكسرين لهما نفس المقام يتم جمع أو طرح البسطين فقط أي انه إذا كان الكسرين على الصورة $\frac{a}{c},\frac{b}{c}$ فيتم الجمع أو الطرح على الشكل:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}\ (\text{حالة الجمع}),\qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}\ (\text{حالة الطرح})$$

(ب) إذا كان للكسرين مقام مختلف يتم تحويلها إلى كسرين لهما نفس المقام ثم نجمع البسطين، أي أنه إذا كان لدينا كسرين على الصورة $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ يتم توحيد المقام للكسرين (bd) ثم نجري عملية الجمع أو الطرح على الصورة:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}\ (\text{حالة الجمع}),\qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd}\ (\text{حالة الطرح})$$

مثـــــال (13)

أوجد ناتج العمليات الآتية:

1. $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}$, 2. $\frac{4}{7}-\frac{7}{7}$

3. $\frac{31}{9}-\frac{35}{9}$, 4. $\frac{2}{4}+\frac{6}{4}$

الحل

1. $\frac{3}{5}+\frac{7}{5}=\frac{10}{5}=2$, 2. $\frac{4}{7}-\frac{7}{7}=-\frac{3}{7}$

3. $\frac{31}{9}-\frac{35}{9}=\frac{-4}{9}$, 4. $\frac{2}{4}+\frac{6}{4}=\frac{8}{4}=2$

مثـــال (14)

أوجد ناتج العملية الآتية:

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{7}$$

الحل

بالنظر إلى الكسرين نجد أن مقامي الكسرين مختلفين وبالتالي نبحث عن مقام مشترك، أي أن:

$$\frac{4}{5}=\frac{4\times 7}{5\times 7}=\frac{28}{35} \quad , \quad \frac{3}{7}=\frac{3\times 5}{7\times 5}=\frac{15}{35}$$

وبالتالي فإن ناتج جمع الكسرين:

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{7}=\frac{28}{35}+\frac{15}{35}=\frac{43}{35}.$$

مثـــال (15)

أوجد ناتج العمليات الآتية:

$$1.\ \frac{3}{4}+\frac{2}{5} \quad , \quad 2.\ \frac{3}{8}-\frac{7}{5} \quad , \quad 3.\ \frac{3}{5}-\frac{2}{3}$$

الحل

$$1.\quad \frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{4}{4}\right)=\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{23}{20}$$

$$2.\quad \frac{3}{8}-\frac{7}{5}=\left(\frac{3}{8}\times\frac{5}{5}\right)-\left(\frac{7}{5}\times\frac{8}{8}\right)=\frac{15}{40}-\frac{56}{40}=-\frac{41}{40}$$

$$3.\quad \frac{3}{5}-\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{5}\times\frac{3}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{5}\right)=\frac{9}{15}-\frac{10}{15}=-\frac{1}{15}$$

ملحوظة (5)

إذا كانت a,b,c,d أعداداً حقيقية فإن:

$$(1)\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$(2)\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

بشرط أن $b\neq 0$ ، $d\neq 0$

مثـــال (16)

أوجد ناتج العمليات الآتية:

$$1.\ \frac{10}{5}-\frac{1}{2} \quad , \quad 2.\ \frac{7}{6}+\frac{3}{5} \quad , \quad 3.\ \frac{4}{5}-\frac{3}{2} \quad , \quad 4.\ -\frac{4}{6}+\frac{3}{7}$$

الحل

$$1.\ \frac{10}{5}-\frac{1}{2}=\frac{10\times 2-5\times 1}{5\times 2}=\frac{20-5}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

$$2.\ \frac{7}{6}+\frac{3}{5}=\frac{7\times 5+6\times 3}{6\times 5}=\frac{35+18}{30}=\frac{53}{30}$$

$$3.\ \frac{4}{5}-\frac{3}{2}=\frac{4\times 2-5\times 3}{5\times 2}=\frac{8-15}{10}=-\frac{7}{10}$$

$$4.\ \frac{-4}{6}+\frac{3}{7}=\frac{-4\times 7+6\times 3}{6\times 7}=\frac{-28+18}{42}=\frac{-10}{42}=-\frac{5}{21}$$

ضرب وقسمة الكسور
(Multiplying & Dividing Fractions)

(أ) حاصل ضرب كسرين هو عبارة عن ضرب البسطين وضرب المقامين، أي أن:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

(ب) حاصل قسمة الكسرين يتم عن طريق تحويل القسمة إلى الضرب وذلك بقلب الكسر بعد علامة القسمة على النحو التالي:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثـــال (17)

أوجد حاصل ضرب العمليات الآتية:

$$1.\ \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right),\quad 2.\ \left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{3}{5}\right),\quad 3.\ \left(-\frac{11}{5}\right)\left(-\frac{4}{7}\right),\quad 4.\ (7)\left(-\frac{2}{9}\right)$$

الحل

$$1.\ \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5 \times 3}{3 \times 4} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$$2.\ \left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{(-1) \times (-3)}{7 \times 5} = \frac{3}{35}$$

$$3.\ \left(-\frac{11}{5}\right)\left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{(-11) \times (-4)}{5 \times 7} = \frac{44}{35}$$

$$4.\ (7)\left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{(7) \times (-2)}{1 \times 9} = -\frac{14}{9}$$

مثـــال (18)

أوجد خارج قسمة العمليات الآتية:

$$1.\ \frac{3}{7} \div \frac{2}{5},\quad 2.\ \frac{2}{9} \div \frac{3}{7},\quad 3.\ -\frac{2}{11} \div 6,\quad 4.\ -\frac{3}{7} \div \frac{3}{5},\quad 5.\ -6 \div \frac{4}{5}$$

الحل

$$1.\ \frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{14}$$

$$2.\ \frac{2}{9} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{27}$$

$$3.\ -\frac{2}{11} \div 6 = -\frac{2}{11} \times \frac{1}{6} = -\frac{2}{66} = -\frac{1}{33}$$

$$4.\ -\frac{3}{7} \div \frac{3}{5} = -\frac{3}{7} \times \frac{5}{3} = -\frac{15}{21} = -\frac{5}{7}$$

$$5.\ -6 \div \frac{4}{5} = -6 \times \frac{5}{4} = -\frac{30}{4} = -\frac{15}{2}$$

الاختبار الذاتي (2)

Self-Test (2)

اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) ناتج المقدار $30 \div 6 \times 3 \div 5$

a. 2 b. 3 c. 5

(ب) ناتج المقدار $-60 \div 10 + 3 \times 4$

a. 6 b. 7 c. 5

(ج) الكسر $\frac{3}{2}$ يكافئ الكسور

a. $\frac{2}{4}, \frac{6}{8}$ b. $\frac{9}{4}, \frac{27}{4}$ c. $\frac{6}{4}, \frac{9}{6}$

(د) عند مقارنة الكسرين $-\frac{3}{4}, -\frac{7}{3}$ تكون العلامة المناسبة هي

a. $<$ b. $>$ c. $=$

(هـ) أحمد وأمه وأخته كانوا يأكلون كعكة، أكل أحمد $\frac{1}{2}$ الكعكة، وأكلت أخته $\frac{1}{4}$ الكعكة، وأكلت الأم $\frac{1}{4}$ الكعكة. أحسب المتبقي من الكعكة.

a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{4}$ c. لا شيء

(و)ناتج قسمة الكسرين $\frac{3}{7} \div \frac{2}{9} =$

a. $\frac{27}{14}$ b. $\frac{6}{16}$ c. $\frac{5}{16}$

تمــــــارين
Exercises

1. أوجد ناتج العمليات الآتية

a. $-15 + 7 + 4 - 21$

b. $-3 \times 8 \div 4 \div 3$

c. $6 + 2 \times 4 - 15 \div 5$

d. $\{24 \div (8 - 4)\} \div 6$

2. اكتب الكسور الآتية في أبسط صورة:

$$\frac{12}{30}, \quad \frac{15}{35}, \quad \frac{10}{25}, \quad \frac{7}{42}, \quad \frac{18}{40}, \quad \frac{44}{60}$$

3. أوجد ثلاثة كسور مكافئة لكل مما يلي:

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}$$

4. أوجد ناتج العمليات الآتية:

a. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

b. $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$

c. $\left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{3}\right)$

d. $(4)\left(\frac{5}{2}\right)$

e. $\frac{11}{3} \div \frac{3}{7}$

f. $-\frac{2}{5} \div 6$

g. $\left(-\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{7}\right)$

h. $\frac{3}{4} \div \frac{-12}{3}$

i. $11 \div \frac{3}{7}$

الباب الأول

مفاهيم جبرية

$2^3 = ?$

الأس

الأساس

الفصل الثالث

القوى المرفوعة للعدد الحقيقي

الفصل الثالث : القوى المرفوعة للعدد الحقيقي

محتويات الفصل

الفصل الثالث: القوى المرفوعة للعدد الحقيقي

Section (3): Exponents

تعريف: اذا كان لدينا العدد الحقيقي x^n حيث n هي قوة العدد فاذا كان n عدد صحيح يسمى ذلك الضرب المتكرر أو الأسس أما اذا كان n عدد نسبي أو كسري يسمى ذلك الجذور.

الضرب المتكرر (الأسس)

(Exponents)

الضرب المتكرر أو الرفع أو الترقية هو تكرار ضرب العدد في نفسه عدة مرات ومن أمثلة ذلك:

$$4 \times 4 = 16 \quad \Rightarrow \quad 4^2 = 16$$
$$2 \times 2 \times 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^3 = 8$$
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \quad \Rightarrow \quad 3^4 = 81$$
$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024 \quad \Rightarrow \quad 4^5 = 1024$$

فإذا كان x عدد حقيقي وكان n عدد طبيعي فإن:

$$x^n = (x)(x)(x)\cdots(x) \qquad n \text{ من المرات}$$

حيث x تسمى الأساس، n الأس أو قوة العدد، والذي يعرف على أنه الضرب المتكرر للعدد.

ملحوظة (1)

القوة الأولى للعدد تساوي العدد نفسه، مثال ذلك:

$$(5)^1 = 5, \qquad (-8)^1 = -8$$

نقول: أي عدد مرفوع للأس (1) يساوي العدد نفسه، عادةً عندما نكتب العدد أس (1) نكتب الأساس دون كتابة الأس.

مثـــــال (1)

أوجد قيمة: $(7)^2,\ (3)^4,\ \left(-\frac{1}{4}\right)^3,\ (-3)^3,\ (4)^2$

الحل

من التعريف السابق نجد أن:

$$(7)^2 = (7)(7) = 49$$
$$(3)^4 = (3)(3)(3)(3) = 81$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64}$$
$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$$
$$(4)^2 = (4)(4) = 16$$



ابن أسلم

هو أبو كامل محمد بن شجاع المصري الحاسب، وهو رياضي ومهندس سوري درس في بغداد والقاهرة وقد أضاف ابن أسلم إضافات كثيرة لأعمال الخوارزمي في الجبر وقد أوجد جذري معادلات الدرجة الثانية وعالج قوانين المعادلات ذات المجهولات الخمسة والمعادلات غير المحدودة.

أهم مؤلفاته: كتاب الجبر والمقابلة، كتاب في الخطأين، كتاب الوصاية بالجذور ، كتاب كمال الجبر وتمامه في أصوله.

خصائص الأسس
(properties of exponents)

لكل $m, n, a, b \in R$ نجد أن:

(أ) عند ضرب عددين أو أكثر ذي أساسات متساوية فإن الناتج يكون نفس الأساس مرفوع له مجموع الأسس

$$b^{m+n} = b^m \cdot b^n$$

(ب) عند قسمة عددين أو أكثر ذي أساسات متساوية فإن الناتج يكون نفس الأساس مرفوع له حاصل طرح الأسس

$$b^{m-n} = \frac{b^m}{b^n}$$

(ج) إذا كان هناك عدد مرفوع لأس والكل مرفوع لأس آخر فإن الناتج يكون نفس العدد مرفوع له حاصل ضرب الأسين

$$(b^m)^n = b^{mn}$$

(د) إذا كان هنالك عددين أو أكثر ذي أساسات غير متساوية وأسس متساوية فإن الناتج يكون حاصل ضرب الأساسين مرفوع للأس

$$(b \cdot c)^m = b^m \cdot c^m$$

(هـ) إذا كان الأس في أي عدد يساوي 0 فإن قيمة هذا العدد تساوي 1 إلا لو كان الأساس صفراً

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

(و) إذا كان الأساس صفرا والأس صفر تكون القيمة غير معرفة.

(ز) إذا كان الأساس سالب والأس فردي يكون الناتج سالب وإذا كان الأس زوجي يكون الناتج موجب.

مثـــال (2)

لاحظ كيفية اجراء العمليات التالية:

(1) $(4)^{0} = (-5)^{0} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{0} = 1,$

(2) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^{3}} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$

(3) $(4)^{-3} = \frac{1}{(4)^{3}} = \frac{1}{64}$

(4) $\frac{(3)^{-2}}{(4)^{-3}} = \frac{(4)^{3}}{(3)^{2}} = \frac{64}{9}$

(5) $\left(\frac{-3}{5}\right)^{3} = \frac{(-3)^{3}}{(5)^{3}} = \frac{-27}{125}$

ملحوظة (2)

ليكن m, n عددين صحيحين موجبين

وكان a عدداً حقيقياً لا يساوي الصفر فإن:

(1) $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}},$

(2) $\frac{a^{-n}}{a^{-m}} = \frac{a^{m}}{a^{n}}$

لاحظ في المثال أننا استخدمنا الخاصية

$a^{0} = 1, \quad a \neq 0$

مثـــال (3)

(1) $(3)^{3}\,(3)^{2} = (3)^{2+3} = (3)^{5} = 243$

(2) $(5)^{7}\,(5)^{-4} = (5)^{7-4} = (5)^{3} = 125$

(3) $(x+1)^{5}(x+1) = (x+1)^{6}$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

لاحظ هنا أننا استخدمنا الخاصية

$(b^{n})(b^{m}) = b^{n+m}$

مثـــال (4)

(1) $\frac{(2)^{7}}{(2)^{4}} = (2)^{7-4} = (2)^{3} = 8$

(2) $\frac{(3)^{3}}{(3)^{-2}} = (3)^{3+2} = (3)^{5} = 243$

(3) $\frac{(1-x)^{4}}{(1-x)^{2}} = (1-x)^{4-2} = (1-x)^{2}$

(4) $\frac{(4)^{3}}{(4)^{4}} = (4)^{3-4} = (4)^{-1} = \frac{1}{4}$

لاحظ هنا أننا استخدمنا الخاصية

$\frac{b^{n}}{b^{m}} = b^{n-m}$

مثـــال (5)

(1) $(3x)^{3} = (3)^{3}\,x^{3} = 27x^{3}$

(2) $(x^{2}\,y^{4})^{2} = x^{4}\,y^{8}$

(3) $(-x\,y)^{3} = (-1)^{3}y^{3}\,y^{3} = -\,x^{3}y^{3}$

(4) $(2x^{2}y^{-1})^{4} = (2)^{4}\,x^{8}y^{-4} = \frac{16\,x^{8}}{y^{4}}$

(5) $(-5x^{-2}y^{2})^{2} = (-5)^{2}x^{-4}y^{4} = \frac{25y^{4}}{x^{4}}$

لاحظ هنا أننا استخدمنا الخاصية

$(ab)^{m} = a^{m}b^{m}$

مثـــــال (6)

(1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2} = \frac{(2)^{2}}{(5)^{2}} = \frac{4}{25}$

(2) $\left(\frac{x}{3}\right)^{4} = \frac{x^{4}}{(3)^{4}} = \frac{x^{4}}{81}$

(3) $\left(\frac{-3}{y}\right)^{2} = \frac{(-3)^{2}}{y^{2}} = \frac{9}{y^{2}}$

(4) $\left(\frac{2x^{3}}{3y}\right)^{0} = \frac{(2x^{3})^{0}}{(3\,y)^{0}} = 1$

لاحظ هنا أننا استخدمنا الخاصية

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \frac{a^{m}}{b^{m}}, \qquad b \neq 0$$

مثـــــال (7)

(1) $(x^{2})^{4} = x^{2\cdot 4} = x^{8}$

(2) $((3)^{2})^{2} = (3)^{2\cdot 2} = (3)^{4} = 81$

(3) $((2)^{3})^{-2} = (2)^{3\cdot(-2)} = (2)^{-6} = \frac{1}{(2)^{6}} = \frac{1}{64}$

(4) $((x+2)^{2})^{4} = (x+2)^{2\cdot 4} = (x+2)^{8}$

(5) $((-2)^{2})^{2} = (-2)^{2\cdot 2} = (-2)^{4} = 16$

لاحظ هنا أننا استخدمنا الخاصية

$$(a^{m})^{n} = a^{mn}$$
$$\forall\ n, m \in Z, \quad a \in R$$

مثـــــال (8)

(1) $(3)^{-4} = \frac{1}{3^{4}} = \frac{1}{81}$

(2) $(x\,y)^{-5} = x^{-5}\,y^{-5} = \frac{1}{x^{5}\,y^{5}}$

(3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{(4)^{-2}}{(3)^{-2}} = \frac{(3)^{2}}{(4)^{2}} = \frac{9}{16}$

(4) $(x^{-7})(x)^{3} = (x)^{-7+3} = (x)^{-4} = \frac{1}{x^{4}}$

(5) $\frac{(4)^{5}}{(4)^{3}} = (4)^{5-3} = (4)^{2} = 16$

(6) $(x^{-3}\,y^{2})^{4} = x^{-12}\,y^{8}$

(7) $\left(\frac{2x^{3}}{5y}\right)^{-2} = \frac{(5y)^{2}}{(2x^{3})^{2}} = \frac{25\,y^{2}}{4x^{6}}$

لاحظ هنا أننا استخدمنا أكثر من خاصية من الخواص السابقة

مثـــــال (9)

في هذا المثال أيضاً سنقوم باستخدام أكثر من خاصية من الخواص السابقة لتبسيط المثال والحصول على أبسط صورة.

أوجد ما يلي في أبسط صورة:

(1) $\left(\frac{-25\,x^3\,y^2}{5\,\,x\,\,y^2}\right)^2$ (2) $(2xy)\,(\,x^2\,y^2)^2$

(3) $\left(\frac{27\,x^3y^5}{9\,\,x^5\,\,y^3}\right)^{-2}$ (4) $\frac{x^2y^4z^2}{x\,y^2z}$

(5) $(-3\,x^{-3}y^{-2})^3$

الحل

(1) $\left(\frac{-25x^3y^2}{5xy^2}\right)^2 = (-5\,x^{3-1}y^{2-2})^2 = (-5x^2)^2 = 25x^4$

(2) $(2xy)\,(\,x^2y^2)^2 = (2xy)(x^4y^4) = 2x^5y^5$

(3) $\left(\frac{27x^3y^5}{9x^5y^3}\right)^{-2} = (3x^{3-5}y^{5-3})^{-2} = (3x^{-2}y^2)^{-2}$

$= \frac{x^4}{9y^4}$

(4) $\frac{x^2y^4z^2}{x\,y^2z} = x^{2-1}\,y^{4-2}\,z^{2-1} = xy^2z$

(5) $(-3x^{-3}y^{-2})^3 = (-3)^3x^{-9}y^{-6} = -27\,x^{-9}y^{-6} = \frac{-27}{x^9y^6}$

الجذور
(Radicals)

جذر العدد هو ما إذا رفعناه لقوة معينة (عادة ما تكون 2) أعطانا العدد الأصلي، ومثال ذلك 3 هي جذر 9 لأن $3^2 = 9$، للتحديد أكثر يسمى الجذر بالجذر التربيعي لتمييزه عن الجذور التكعيبية والجذور من الدرجات الرابعة والخامسة ... إلخ.

أي عدد حقيقي موجب له جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب، ويرمز للجذر الموجب للعدد x بالرمز $\sqrt{x}$ وللجذر السالب بالرمز $-\sqrt{x}$

<u>الجذور من درجات أعلى:</u>

بالمثل يقال أن y هو جذر تكعيبي للعدد x إذا كان $y^3 = x$ ويرمز للجذر التكعيبي بالرمز $\sqrt[3]{x}$ ومن السهل ملاحظة أن 2 هي الجذر التكعيبي للعدد 8 وأن 3 هي الجذر التكعيبي للعدد 27 والعدد -3 هو الجذر التكعيبي للعدد -27.

يمكن أيضًا كتابة الجذر النوني للعدد x بالطريقة الأسية بالشكل الآتي:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

إذا كانت n عدد زوجي ولدينا $\sqrt[n]{x}$ فإن الجذر يكون معرف في الأعداد الحقيقية إذا كانت $x \geq 0$ أما إذا كانت $x < 0$ فإن الجذر غير معرف في الأعداد الحقيقية.

ملحوظة (3)

- العدد صفر له جذر واحد هو الصفر أي أن:

$$\sqrt{0} = 0$$

- لا يوجد جذر تربيعي للعدد الحقيقي السالب.

ومن أمثلة الجذور ما يلي:

$$\sqrt{9} = 3,\text{-}3 \quad -\sqrt{625} = -25, \quad \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2},$$

$$\sqrt[3]{125} = 5, \quad \sqrt[5]{-32} = -2, \quad \sqrt[6]{64} = 2$$

مثـــــال (10)

(1) $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3,\text{-}3$

(2) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(2)^3} = 2$

(3) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

(4) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

(5) $\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$

مثـــــال (11)

اوجد قيمة كل مما يأتي:

(1) $\sqrt{25x^2}$, (2) $\sqrt[3]{-27x^6}$, (3) $\sqrt[4]{625x^4}$

الحل

(1) $\sqrt{25x^2} = \sqrt{(5x)^2} = |5x|$

(2) $\sqrt[3]{-27x^6} = \sqrt[3]{(-3x^2)^3} = -3x^2$

(3) $\sqrt[4]{625x^4} = \sqrt[4]{(5x)^4} = |5x|$

خواص الجذور

تخضع الجذور لبعض الخواص:

(أ) إذا كانت x عدد حقيقي، n عدد زوجي طبيعي أكبر من أو يساوي 2 فإن:

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|, \quad n \geq 2, \quad n \in N$$

(ب) إذا كانت x عدد حقيقي، n عدد فردي طبيعي أكبر من أو يساوي 3 فإن:

$$\sqrt[n]{x^n} = x, \quad n \geq 3, \quad n \in N$$

(ج) إذا كان لدينا $\sqrt[n]{x^n}$ حيث أن n عدد فردي فإذا كانت x موجبة القيمة يكون الناتج موجب وإذا كانت x سالبة القيمة يكون الناتج سالب.

(د) إذا كانت كلاً من x, y أعداداً حقيقية بحيث أن $x, y \geq 0$ فإن:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}, \quad n \in N$$

(هـ) إذا كانت كلاً من x, y أعداداً حقيقية بحيث أن $x, y \geq 0$ فإن:

$$\sqrt[n]{x/y} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \quad n \in N$$

(و) إذا كانت x عدد حقيقي فإن:

$$\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}, \quad (n,m) \geq 2, \quad (n,m) \in N$$

(ز) إذا كانت كل من $n, m \geq 2$, $x \geq 0$ فإن:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

مثـــال (12)

لاحظ هنا أننا استخدمنا الخاصية:

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|, \quad n \geq 2, \quad n \in N$$

(1) $\sqrt{x^2} = |x|$

(2) $\sqrt[6]{x^6} = |x|$

(3) $\sqrt{16} = |4| = 4$

(4) $\sqrt[4]{49} = \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

مثـــال (13)

لاحظ هنا أننا استخدمنا الخاصية:

$$\sqrt[n]{x^n} = x, \quad n \geq 3, \quad n \in N$$

(1) $\sqrt[3]{x^3} = x$

(2) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(4)^3} = 4$

(3) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

(4) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{(2)^5} = 2$

مثـــال (14)

لاحظ هنا أننا استخدمنا الخاصية التي تنص على أنه إذا كان لدينا $\sqrt[n]{x^n}$ حيث أن n عدد فردي فإذا كانت x موجبة القيمة يكون الناتج موجب وإذا كانت x سالبة القيمة يكون الناتج سالب.

(1) $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{(4)^3}=4$

(2) $\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$

(3) $\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{(2)^5}=2$

(4) $\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$

مثـــال (15)

استخدام الخاصية التي تنص على أنه إذا كانت كلاً من x,y أعداداً حقيقية بحيث أن $x,y\geq 0$ فإن:

$$\sqrt[n]{xy}=\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y},$$

بالإضافة إلى خواص الأسس.

(1) $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$

(2) $\sqrt{5}\sqrt{5}=\sqrt{(5)(5)}=5$

(3) $\sqrt[3]{-27}\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3(-3)^3}=(-3)(-3)=9$

(4) $\sqrt[4]{81y^8}=\sqrt[4]{(3)^4(y^2)^4}=|3|y^2$

مثـــال (16)

استخدام الخاصية التي تنص على أنه إذا كانت كلاً من x,y أعداداً حقيقية بحيث أن $x,y\geq 0$ فإن:

$$\sqrt[n]{x/y}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}},$$

بالإضافة إلى استخدام خواص الأسس.

(1) $\sqrt{\frac{16x^6}{25x^4}}=\sqrt{\frac{(4)^2x^{6-4}}{(5)^2}}=\sqrt{\frac{(4)^2x^2}{(5)^2}}=\frac{4|x|}{5}$

(2) $\sqrt[3]{\frac{-32y^4}{4y^{-2}}}=\sqrt[3]{-8y^{4+2}}=\sqrt[3]{(-2)^3y^6}=-2y^2$

مثـــال (17)

استخدام الخاصية التي تنص على أنه إذا كانت x عدد حقيقي فإن:

$$\sqrt[n]{x^m}=(x^m)^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{m}{n}},$$
$$(n,m)\geq 2,\quad (n,m)\in N$$

بالإضافة إلى استخدام خواص الأسس.

(1) $\sqrt{9}=\sqrt{(3)^2}=3^{\frac{2}{2}}=3$

(2) $\sqrt[3]{y^6x^9}=y^{\frac{6}{3}}x^{\frac{9}{3}}=y^2x^3$

(3) $\sqrt[3]{(4)^4}=(4)^{\frac{4}{3}}$

(4) $\sqrt{16x^4y^2}=4x^2|y|$

مثـــال (18)

استخدام الخاصية التي تنص على أنه إذا كانت كل من $x\geq 0$, $n,m\geq 2$ فإن:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[nm]{x}$$

(1) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2$

(2) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}=\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$

(3) $\sqrt[4]{\sqrt{y}}=y^{\frac{1}{8}}$

مثـــــال (19)

بسط كلا مما يأتي وضعه في أبسط صورة

$$(1)\quad \frac{(\sqrt{5})^3(\sqrt{5})^5}{(\sqrt{10})^6}, \qquad (2)\quad \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{6})^{-3}}{(\sqrt{3})^{-3}}$$

الحل

$$(1)\quad \frac{(\sqrt{5})^3(\sqrt{5})^5}{(\sqrt{10})^6} = \frac{(\sqrt{5})^{3+5}}{(\sqrt{5})^6(\sqrt{2})^6} = \frac{(\sqrt{5})^8}{8(\sqrt{5})^6}$$

$$= \frac{(\sqrt{5})^{8-6}}{8} = \frac{(\sqrt{5})^2}{8} = \frac{5}{8}$$

$$(2)\quad \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{6})^{-3}}{(\sqrt{3})^{-3}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2})^{-3}(\sqrt{3})^{-3}}{(\sqrt{3})^{-3}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

في هذا المثال استخدمنا أكثر من خاصية من خواص الجذور.

الاختبار الذاتي (3)

Self-Test (3)

اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) $(2)^4$

a. 16 b. 8 c. 6

(ب) $(3x)(4x^6)$

a. $7x^6$ b. $12x^6$ c. $12x^7$

(ج) $6x^{-2}$

a. $\frac{6}{x^2}$ b. $-\frac{6}{x^2}$ c. $\frac{x^2}{6}$

(د) $x^{-1} - y^{-1}$

a. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ b. $\frac{y-x}{xy}$ c. $\frac{x-y}{xy}$

(هـ) $\sqrt[5]{-32}$

a. $+2$ b. -2 c. 4

(و) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$

a. $\sqrt[5]{64}$ b. $\sqrt[6]{64}$ c. $\sqrt[4]{64}$

تمـــــــارين
Exercises

1. أوجد مقدار العمليات الآتية:

a. $\left(\frac{-2}{3}\right)^3$ b. $(5)^{-4}$ c. $(5)^2(5)^3$

d. $\frac{(x-3)^4}{(x-3)^2}$ e. $\frac{(3)^{-1}}{(3)^{-4}}$ f. $(x^4)^2$

g. x^{-2} h. $(x^3y^2)^3$ i. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$

2. ضع المقادير الآتية في أبسط صورة:

a. $2xy(xy)^2$ b. $(3)^2(3)^{-4}$ c. $4x^{-1}$

d. $\left(\frac{9x^5y^4}{3x^2y}\right)^2$ e. $(2x^3y^4)(3xy)$ f. $(x^{-3})^2$

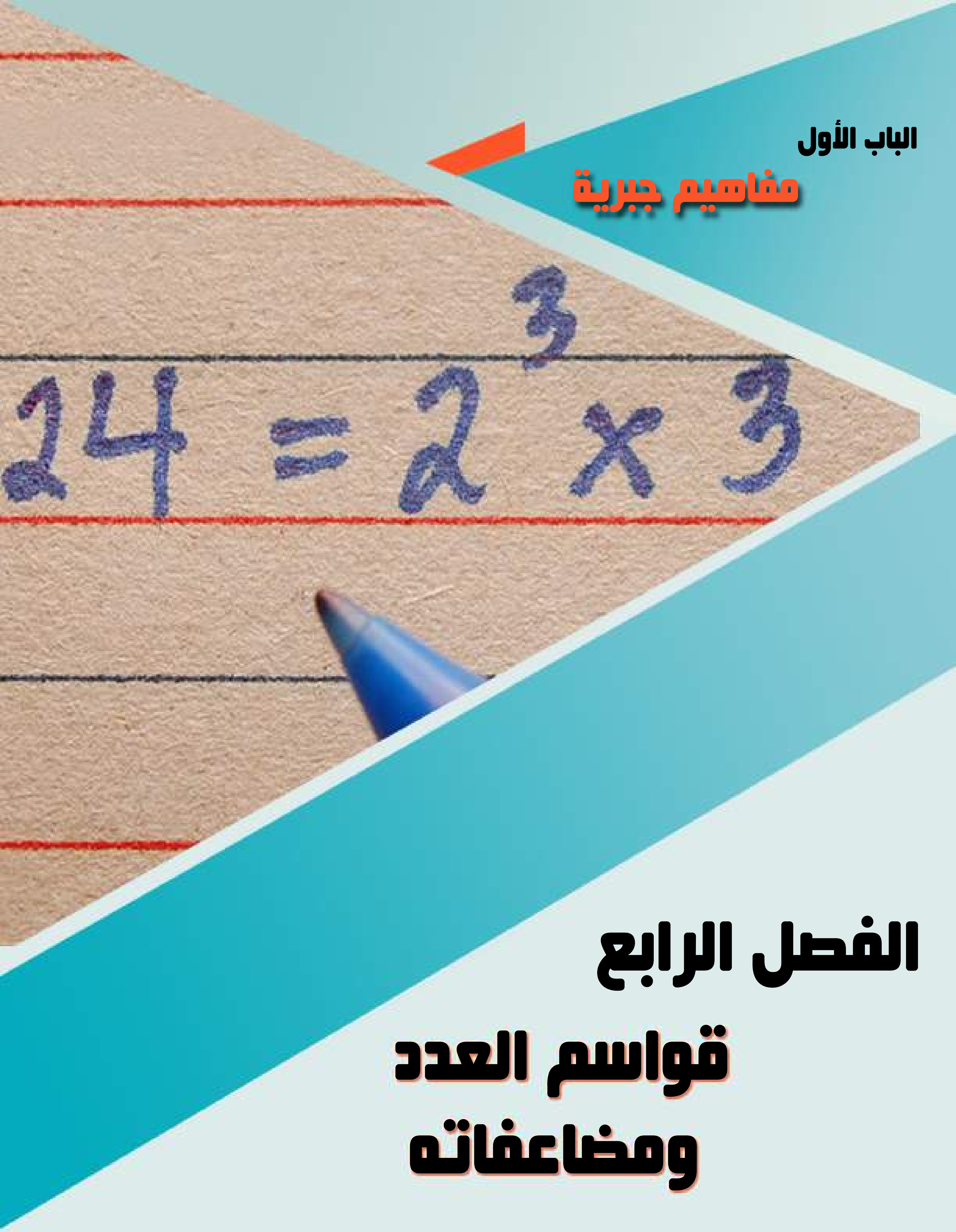
3. أوجد قيم المقادير الآتية:

a. $\sqrt{5}\sqrt{5}$ b. $\sqrt[3]{27x^{18}}$ c. $\sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{-8}$

d. $\sqrt{\frac{4\times6}{9\times4}}$ e. $\sqrt[3]{x^6y^6}$ f. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

g. $\sqrt[7]{x^7y^{14}}$ h. $\sqrt[3]{81}$ i. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^{18}y^{12}}}$

j. $\sqrt{\frac{16x^4}{9y^6}}$


الباب الأول
مفاهيم جبرية
24 = 2^3 x 3
الفصل الرابع
قواسم العدد
ومضاعفاته

الفصل الرابع : قواسم العدد ومضاعفاته

محتويات الفصل

الفصل الرابع: قواسم العدد ومضاعفاته

Section(4): Divisors and Multipliers of a Number

قواسم العدد

قواسم العدد هي الأعداد الأولية التي يقبل العدد القسمة عليها بدون باقي. ومن أمثلة ذلك:

- العدد 3 قاسم من قواسم العدد 18 لأن العدد 18 يقبل القسمة على 3
- العدد 7 قاسم من قواسم العدد 56 لأن العدد 56 يقبل القسمة على 7
- العدد 5 قاسم من قواسم العدد 15 لأن العدد 15 يقبل القسمة على 5

تعريف العدد الأولي: هو العدد الذي لا يقبل القسمة الا على نفسه والواحد الصحيح، ومن أمثلة الأعداد الأولية:

$$2,3,5,7,11,13,17,\cdots$$

مثـــال (1)

أوجد قواسم الأعداد الآتية:

$$65, \quad 14, \quad 125, \quad 140, \quad 115$$

الحل

لإيجاد قواسم العدد نقوم بتحليله

$$\begin{array}{r|l} 5 & 65 \\ 13 & 13 \\ & 1 \end{array} \quad (5)(13) = 65, \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 14 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array} \quad (2)(7) = 14$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 125 \\ 5 & 25 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array} = (5)(5)(5) = 125, \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 140 \\ 2 & 70 \\ 5 & 35 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array} = (2)(2)(5)(7) = 140$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 115 \\ 23 & 23 \\ & 1 \end{array} = (5)(23) = 115$$



ابن بدر

هو عبد الله محمد بن عمر رياضي أندلسي عاش في النصف الثاني من القرن السابع الهجري الموافق الثالث عشر الميلادي وقد نشأ في مدينة إشبيلية.

أهم مؤلفاته:

كتاب اختصار الجبر والمقابلة الذي أورد فيه عدة أبواب منها في حساب الجذور، وباب في الجبر والمقابلة، وباب في الأسئلة على المسائل الست للخوارزمي.

القواسم المشتركة لعددين

هي الأعداد التي تقبل القسمة على العددين معاً.

مثـــال (2)

أوجد القواسم المشتركة للعددين $24,32$

الحل

$$\begin{array}{c|l} 2 & 24 \\ 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|l} 2 & 32 \\ 2 & 16 \\ 2 & 8 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ & 1 \end{array}$$

$$(2)^3(3) = 24 \qquad (2)^5 = 32$$

أي أن القواسم المشتركة بين العددين هي

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = (2)^3$$

وبالتالي نجد أن الأعداد $2,4,8$ هي مجموعة القواسم المشتركة بين العددين.

مثـــال (3)

أوجد القواسم المشتركة للعددين $35,56$

الحل

$$\begin{array}{c|l} 5 & 35 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|l} 2 & 56 \\ 2 & 28 \\ 2 & 14 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array}$$

$$(5)(7) = 35 \qquad (2)^3(7) = 56$$

ومن ذلك يتضح أنه لدينا قاسم مشترك واحد فقط وهو العدد 7.

مثـــال (4)

أوجد القواسم المشتركة للعددين $63,72$

الحل

$$\begin{array}{c|l} 2 & 72 \\ 2 & 36 \\ 2 & 18 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|l} 3 & 63 \\ 3 & 21 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array}$$

$$(2)^3(3)^2 = 72 \qquad (3)^2(7) = 63$$

القواسم المشتركة للعددين هي: $3 \cdot 3 = (3)^2$، أي أن العددين $3,9$ هما القاسمان المشتركان.

القاسم المشترك الأكبر

يعرف القاسم المشترك الأكبر لعددين على أنه أكبر عدد يقسم في نفس الوقت العددين معاً بدون أي باقي قسمة ويرمز له بالرمز (ق.م.ك).

مثـــال (5)

أوجد القاسم المشترك الأكبر بين العددين 16,20

الحل

$$\begin{array}{c|c} 2 & 16 \\ 2 & 8 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \\ & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|c} 2 & 20 \\ 2 & 10 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$$(2)^4 = 16 \qquad (2)^2(5) = 20$$

القواسم المشتركة بين العددين هي 2,4 وبالتالي فإن القاسم المشترك الأكبر هو 4.

مثـــال (6)

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 45,65.

الحل

$$\begin{array}{c|c} 5 & 45 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|c} 5 & 65 \\ 13 & 13 \\ & 1 \end{array}$$

$$(5)(13) = 65$$

$$(5)(3)^2 = 45$$

ومن ذلك ينتج أن القاسم المشترك الأكبر للعددين هو العدد 5.

مثـــال (7)

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 165,210.

الحل

$$\begin{array}{c|c} 2 & 210 \\ 3 & 105 \\ 5 & 35 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|c} 5 & 165 \\ 3 & 33 \\ 11 & 11 \\ & 1 \end{array}$$

$$(2)(3)(5)(7) = 210 \qquad (3)(5)(11) = 165$$

ومن ذلك يتضح أن القاسم المشترك الأكبر للعددين يساوي:

$$3 \times 5 = 15$$

مثـــال (8)

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 12,18

الحل

$$\begin{array}{c|l} 2 & 18 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|l} 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

$$(2)(3)^2 = 18 \qquad (2)^2\,(3) = 12$$

ومن ذلك يتضح أن القاسم المشترك الأكبر للعددين يساوي:

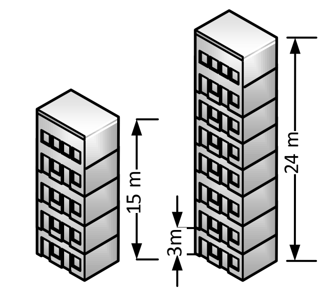
$$2 \times 3 = 6$$

مثـــــال (9)

قام مهندس بعمل نموذجين لبناء برجين ارتفاعهما 24 م، 15 م أراد أن تكون الطوابق متساوية في الارتفاع فما هو أكبر ارتفاع ممكن للطابق، ثم أوجد عدد الطوابق لكل نموذج.

الحل

عند النظر في المسألة نجد أن ارتفاع الطابق الواحد هو القاسم المشترك الأكبر للارتفاعين وبالتالي:



$$\begin{array}{c|l} 2 & 24 \\ 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|l} 3 & 15 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$$(2)^3(3) = 24 \qquad (3)(5) = 15$$

القاسم المشترك الأكبر يساوي 3 وبالتالي ارتفاع الطابق يساوي 3 أمتار.

$$\text{عدد طوابق البناء الأول} = \frac{24}{3} = 8 \ \text{طوابق}$$

$$\text{عدد طوابق البناء الثاني} = \frac{15}{3} = 5 \ \text{طوابق}$$

مثـــــال (10)

قام طباخ في أحد المطاعم بعمل 24 فطيرة بالجبن و 36 فطيرة بالبيض وأراد ترتيبها على الأطباق بحيث تحتوي الأطباق على العدد نفسه من فطائر الجبن والعدد نفسه من فطائر البيض فما هو أكبر عدد من الأطباق يستطيع الطباخ تجهيزها من نوعي الفطائر.

الحل

نلاحظ عند قراءة المثال أن عدد الأطباق المراد تجهيزها هو القاسم المشترك الأكبر للفطائر وبالتالي فإن:



$$\begin{array}{c|l} 2 & 36 \\ 2 & 18 \\ 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|l} 2 & 24 \\ 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

$$(2)^2\,(3)^2 = 36 \qquad (2)^3\,(3) = 24$$

ومما سبق ينتج أن القاسم المشترك الأكبر هو العدد 12 وبالتالي فإن الطباخ يستطيع تجهيز 12 طبقاً، كل طبق يحتوي على:

$$\text{عدد فطائر البيض} = \frac{36}{12} = 3 \ \text{فطيرة} \qquad \text{عدد فطائر الجبن} = \frac{24}{12} = 2 \ \text{فطيرة,}$$

مضاعفات العدد

)

مضاعفات العدد هو ضرب العدد في 1، 2، 3، 4، 5، ⋯ أي أنها تمثل جدول ضرب العدد. فمثلاً

$$2,4,6,8,10,\cdots$$

$$3,6,9,12,15,\cdots$$

$$7,14,21,28,35,\cdots$$

$$10,20,30,40,50,\cdots$$

والمضاعفات المشتركة بين العددين هي عبارة عن الأعداد المشتركة بين العددين.

مثـــال (11)

أوجد المضاعفات المشتركة للعددين 3,7

الحل

مضاعفات العدد 3 هي $3,6,9,12,15,18,21,24,\cdots$

ومضاعفات العدد 7 هي $7,14,21,28,35,42,\cdots$

ومن ذلك يتضح أن المضاعفات المشتركة للعددين هي:

$$21,42,63,\cdots$$

مثـــال (12)

أوجد المضاعفات المشتركة للعددين 4,5

الحل

مضاعفات العدد 4 هي

$$4,8,12,16,20,24,\cdots$$

ومضاعفات العدد 7 هي

$$5,10,15,20,25,\cdots$$

ومن ذلك يتضح أن المضاعفات المشتركة للعددين هي:

$$20,40,60,\cdots$$

المضاعف المشترك الأصغر

هو أصغر عدد صحيح موجب مضاعف لكلا هذين العددين، وهذا يعني أنه من الممكن قسمة المضاعف المشترك الأصغر على العددين بدون باقي قسمة ويرمز له بالرمز (م.م.ص)

مثـــال (13)

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3,4.

الحل

مضاعفات العدد 3 هي: $3,6,9,12,15,\cdots$

مضاعفات العدد 4 هي: $4,8,12,16,20,\cdots$

ومن ذلك ينتج أن المضاعف المشترك الأصغر (م.م.ص) هو العدد 12.

مثـــال (14)

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 5,11.

الحل

مضاعفات العدد 5 هي: $5,10,15,20,25,30,35,\cdots$

مضاعفات العدد 11 هي: $11,22,33,44,55,66,77,\cdots$

ومن ذلك ينتج أن المضاعف المشترك الأصغر (م.م.ص) هو العدد 55 وهو عبارة عن حاصل ضرب العددين.

> ملحوظة (1)
> المضاعف المشترك الأصغر لعددين أوليين هو حاصل ضرب العددين.

مثـــــال (15)

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 7,13.

الحل

نلاحظ أن الأعداد المعطاة أعداداً أولية ولذلك فإن:

$$\text{المضاعف المشترك الأصغر} = 7 \times 13 = 91$$

مثـــــال (16)

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18,28.

الحل

في هذا المثال يجب أولاً تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية ولذلك نجد أن:

$$18 = (2)(3)^2, \qquad 28 = (2)^2(7)$$

وعند ضرب العوامل الأولية ذات الأس الأكبر نجد أن:

$$\text{المضاعف المشترك الأصغر} = (2)^2(3)^2(7) = 252$$

ملحوظة (2)
المضاعف المشترك الأصغر لعددين هو حاصل ضرب قوى العوامل الأولية التي لها الأس الأكبر.

مثـــــال (17)

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 128,480.

الحل

بتحليل كل عدد إلى عوامله الأولية نجد أن:

$$128 = (2)^7, \qquad 480 = (2)^5(3)(5)$$

ولإيجاد المضاعف المشترك الأصغر نضرب العوامل الأولية التي لها الأس الأكبر فنحصل على:

$$\text{المضاعف المشترك الأصغر} = (2)^7(3)(5) = 1920$$

الاختبار الذاتي (4)

Self-Test (4)

اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) قواسم العدد 280

a. $(2)^3(5)(7)$ b. $(2)^2(5)(7)$ c. $(2)(5)^2(7)$

(ب) القواسم المشتركة للعددين 24,70

a. 2,3 b. 3,7 c. 2

(ج) القاسم المشترك الأكبر بين العددين 105,231

a. 33 b. 21 c. 15

(د) المضاعفات المشتركة للعددين 3,19

a. 59 b. 57 c. 113

(هـ) المضاعف المشترك الأصغر بين العددين 32,38

a. 608 b. 1216 c. 304

(و) المضاعف المشترك الأصغر بين العددين 2,3,4

a. 24 b. 12 c. 18

تمـــــــارين

Exercises

1. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين في كل مما يأتي:

a. 32,80 b. 75,45 c. 124,142

d. 20,24 e. 48,72 f. 60,44

2. أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين في كل مما يأتي:

a. 4,5 b. 5,4 c. 14,36

d. 15,18 e. 11,7 f. 11,17

3. اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

(أ) القواسم المشتركة للعددين 18,30

a. 3,4 b. 2,3,6 c. 2,4

(ب) القاسم المشترك الأكبر بين العددين 60,44

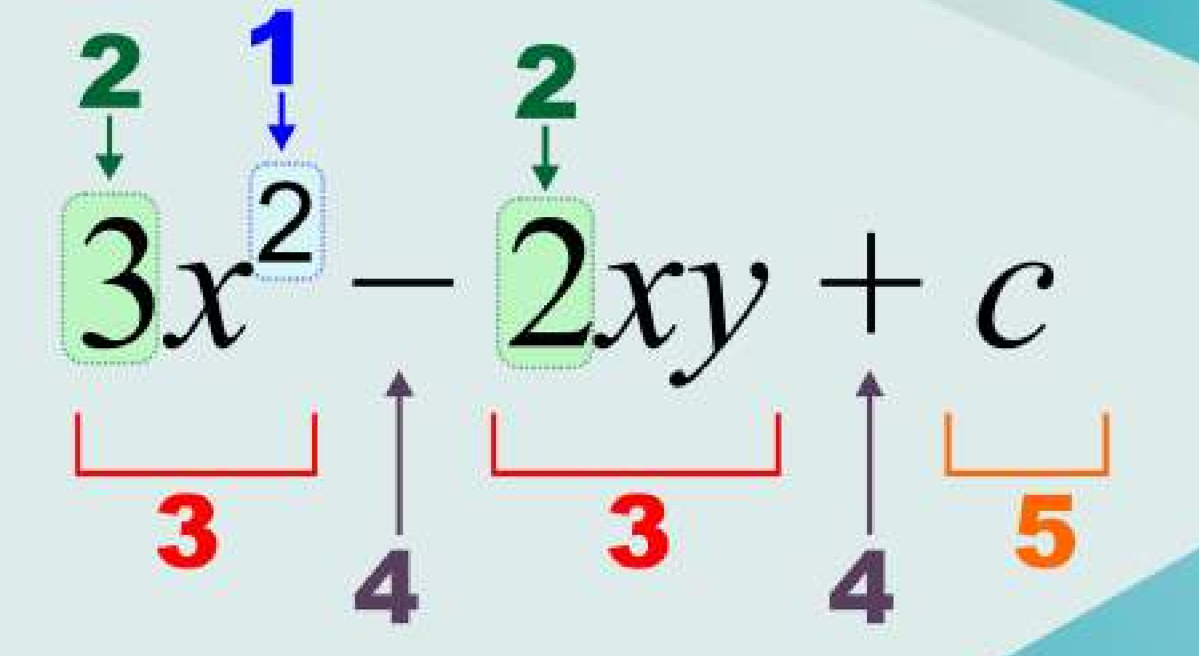
a. 2 b. 3 c. 4

(ج) المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3,7

a. 10 b. 72 c. 21

الباب الأول

مفاهيم جبرية



الفصل الخامس

العمليات على المقادير الجبرية

الفصل الخامس : العمليات على المقادير الجبرية

محتويات الفصل

الفصل الخامس: العمليات على المقادير الجبرية

Section (5): Algebraic Expressions Operations

المقدار الجبري
(Algebraic Expression)

تعريف: المقدار الجبري هو عبارة عن مقدار مكون من أربع أشياء، وهي الإشارة (موجبة أو سالبة) والمعامل (الأعداد) والأساس مثل (x) والأس (أرقام مثل n) فمثلاً $-4\,x^3$ مقدار جبري، x مقدار جبري، وهذه المقادير هي أمثلة لمقادير جبرية متنوعة:

$$\frac{y-1}{y+1},\qquad \frac{x}{y},\qquad 3x^2+2x+4$$

العمليات الجبرية على المقادير الجبرية

(أ) **جمع وطرح المقادير:**

لا يتم الجمع أو الطرح إلا مع المتغيرات المتشابهة في الأساس والأس فقط والجمع والطرح بالمعاملات العددية.

مثـــال (1)

أوجد ناتج المقادير الآتية:

(1) $(5x^2+4x-2)+(3\,x^2-x+3)$

(2) $(3x^5+4\,x^3+x-5)-(\,x^5-3\,x+4)$

(3) $(2x^3-3x^2+x+4\,)-(x^3-3\;x^2+x+7)$

الحل

من التعريف السابق نقوم بجمع أو طرح الحدود المتشابهة فنجد أن:

(1) $(5x^2+4\,x-2)+(\,3x^2-x+3)=8x^2+3x+1$

(2) $(3x^5+4x^3+x-5)-(x^5-3x+4)$
$=3x^5+4x^3+x-5-x^5+3x-4$
$=2x^5+\;4x^3+4x-9$

(3) $(2x^3-3x^2+x+4\,)-(x^3-3x^2+x+7)=x^3-3$



المهاني

هو أبو عبدالله محمد بن فارس عيسى، و هو رياضي وفلكي، ويعد من العلماء الذين برزوا في الرياضيات والفلك وأصله من بلاد فارس وتوفي حوالي عام (261ــ267هـ) (874 ــ880م)

من أهم مؤلفاته: في الجبر معادلته الشهيرة باسم (معادلة المهاني) ، وهي من معادلات الدرجة الثانية، كتاب في النسبة، كتاب شرح ما ألفه أرخميدس في الكرة و الأسطوانة، كما عالج المهاني مسألة أرخميدس الخاصة بالمستوى الذي يقطع الكرة إلى جزئين.

(ب) **ضرب المقادير الجبرية**

عند ضرب مقدارين يتم ضرب الإشارات ثم المعاملات العددية وجمع الأس حسب قوانين الأسس.

مثـــال (2)

(1) $(x^4)(-3x^2) = -3x^{4+2} = -3x^6$

(2) $(x-3)(x+2) = x(x+2) - 3(x+2)$
$= x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$

(3) $5(x^2 + 3x - 3) = 5x^2 + 15x - 15$

(4) $\frac{1}{3}(9x^2 + 3x - 12) = \frac{9x^2}{3} + \frac{3x}{3} - \frac{12}{3} = 3x^2 + x - 4$

تذكر مجموعة من القوانين المستخدمة كثيراً في العمليات الجبرية.

(أ) **الفرق بين مربعين:**

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

(ب) **المربع الكامل:**

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(ج) **الفرق بين مكعبين:**

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

(د) **مجموع مكعبين:**

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

مثـــال (3)

(1) $(x-3)(x+3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 9$

(2) $(x-2)(x-2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$

(3) $(4+x)(4+x) = 16 + 4x + 4x + x^2 = 16 + 8x + x^2$

(4) $(3-x)(9 + 3x + x^2) = 27 + 9x + 3x^2 - 9x - 3x^2 - x^3$
$= 27 - x^3$

لاحظ هنا أننا استخدمنا في الجزء الأول الفرق بين مربعين، وفي الجزء الثاني والثالث المربع الكامل، أما الجزء الرابع فقد استخدمنا الفرق بين مكعبين.

(ج) **قسمة المقادير الجبرية:**

عند اجراء عملية القسمة نستخدم قواعد الإشارات في القسمة ثم المعاملات العددية ثم استخدام قوانين الأسس وسوف نقتصر فقط على قسمة مقدار جبري يحتوي على عدة حدود على مقدار جبري يحتوي على حد واحد فقط.

مثـــال (4)

(1) $\frac{3x^2 + 4x}{x} = 3x + 4,$

(2) $\frac{-5x^3 - 10x}{-5x} = x^2 + 2$

(3) $\frac{16x^3 - 8x^2 + 4x}{4x} = 4x^2 - 2x + 1$

(4) $\frac{3x^2y^3 + 6x^3y^2 - 12xy}{3xy} = xy^2 + 2x^2y - 4$

الاختبار الذاتي (5)

Self-Test (5)

اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) $5x^2 + 10x^2$

a. $15x^4$ b. $15x^2$ c. 15

(ب) $(3x)\left(4 + \frac{1}{x}\right)$

a. $12 + 3x$ b. $\frac{12}{x} + 3x$ c. $12x + 3$

(ج) $(x^2 + 6x + 9)$

a. $(x+3)^2$ b. $(x-3)^2$ c. (x^2+3)

(د) $x^3 - y^3$

a. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ b. $(x-y)(x^2-xy-y^2)$ c. $(x+y)(x^2+xy-y^2)$

(هـ) $(x+10)^2$

a. $(x^2+100x+100)$ b. $(x^2+20x-100)$ c. $(x^2+20x+100)$

(و) $\left(\frac{27x^3y^5+6x^3y^2-12xy}{3xy}\right)$

a. $9x^2y^4 + 2x^2y - 4$ b. $9x^4y^3 + 2x^2y - 4$ c. $9x^2y^4 + 2x^2y + 4$

تمـــــــــارين
Exercises

1. أوجد ناتج العمليات الآتية في أبسط صورة:

a. $3(x+4)$

b. $(x-3)(x-7)$

c. $(x+2)(x+3)$

d. $(x+4)(x-4)$

e. $\frac{x^2-5x}{x}$

f. $3-5(3-4x)$

g. $2[2-(2x+1)]$

h. $(4x-5)(x+2)$

i. $(x+2y)(x-2y)$

j. $x^2-(x-2)(x+3)$

k. $(x+5)^2$

l. $(3xy+3)(5x^2y^2+2)$

m. $\frac{15x^3y^2-5x^2y+5xy}{5xy}$

n. $\frac{20x^4-12x^2-8x}{4x}$

الباب الثاني: التحليل

الهدف من هذا الباب

في الجزء الأول من الباب سنتعرف على قواعد التحليل للمقاديلر الجبرية بشكل عام ثم المقدار الثلاثي خاصة، بعد ذلك نتعرف على كيفية تبسيط المقادير الجبرية ثم ختام هذا الباب سنأخذ بعض التطبيقات التي لا غني عنها في استخدامتنا اليومية.

1 الفصل الأول: قواعد التحليل



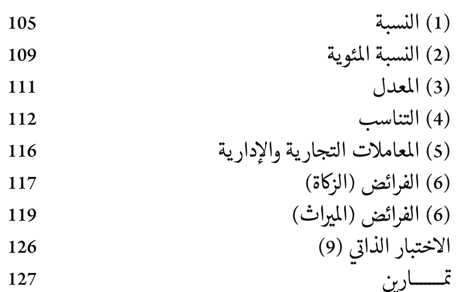
الفصل الثاني: تحليل المقدار الثلاثي

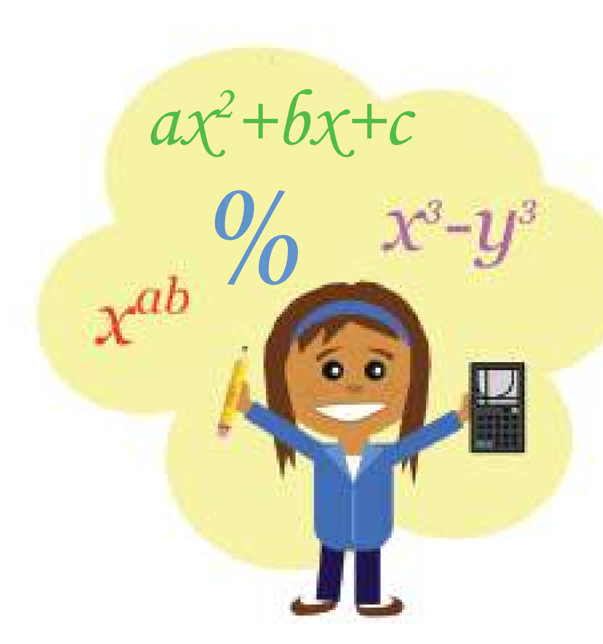


الفصل الثالث تبسيط المقادير الجبرية



الفصل الرابع تطبيقات







بعد الانتهاء من هذا الباب يجب أن تكون قادراً على فهم:
قواعد التحليل للمقادير الجبرية وخاصة الثلاثية منها وكيفية استخدام قواعد التحيل باستخدام الفرق بين مربعين والفرق بين مكعبين ومجموع مكعبين والمربع الكامل وأيضا يجب أن تكون قادراً على تحليل المقدار الجبري الثلاثي وتكون قادراً على تبسيط المقادير الجبرية المختلفة وأخير تتعرف على كيفية استخدام النسبة والنسبة المئوية والمعدل والتناسب في حياتك اليومية ومعاملاتك التجارية.

الباب الثاني

التحليل

$$6x^2y + 9x^3y^4 - 3xy$$
$$= 3xy(2x + 3x^2y^3 - 1)$$

$$5(x-2) + 6(x-2)^2 =$$
$$= (x-2)[5 + 6(x-2)]$$
$$= (x-2)(6x-7)$$

الفصل الأول

قواعد التحليل

الفصل الأول : قواعد التحليل

محتويات الفصل

الفصل الأول: قواعد التحليل

Section(1): Factorization Rules

ذكرنا في آخر الباب السابق (الفصل الخامس) قوانين هامة ولا غني عنها في مسائل التحليل للمقادير الجبرية وسنذكرها مرة أخرى لأهميتها:

الفرق بين مربعين
(Difference between two squares)

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$$

مجموع مكعبين
(Sum of two Cubes))

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

الفرق بين مكعبين
(Difference between two Cubes))

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

المربع الكامل
(Perfect Square)

$$\begin{cases}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\end{cases}$$

قواعد التحليل
(Factorization Rules)

(أ) **العامل المشترك (Common Factor)**

في كثير من الاحيان عند التعامل مع المتغيرات الرياضية التي لا يمكن تبسيطها باستخدام قاعدة الكسور لذا نلجأ الي استخدام العامل المشترك الذي يوجد في جميع الحدود سواء في البسط او المقام وهو عبارة عن مقدار يقبل القسمة على جميع الحدود بدون باقي. والأمثلة التالية ستوضح ذلك.

مثـــــال (1)

لاحظ في كل مقدار العامل المشترك (**مكتوب باللون الأحمر**):

(1) $4x + 4 = 4(x + 1)$

(2) $2x^2y - 6xy^3 = 2xy(x - 3y^2)$

(3) $7x^2 - 14x + 21 = 7(x^2 - 2x + 3)$

(4) $-5 - 20x^2 = -5(1 + 4x^2)$



ابن الهيثم

هو أبو علي محمد بن الحسن بن الحسن المعروف بالبصري، وهو فيزيائي وفلكي عراقي، ولد في العراق عام (354هـ – 965م) وتوفي بالقاهرة (430هـ – 1038م).

من أهم مؤلفاته: كتاب شرح أصول أقليدس في الهندسة والعدد وتلخيصه، وكتاب في أصول الحساب، وكتاب حساب المعاملات، وكتاب في تحليل المسائل العددية باستخدام الجبر والمقابلة، وكتاب تحليل المسائل الهندسية في مراكز الأثقال.

قواعد التحليل

(Factorization Rules)

(ب) الفرق بين مربعين (Difference between Squares):

إذا كان لدينا مقداراً على صورة فرق بين مربعين نستخدم القانون المذكور في أول الفصل وهو قانون تحليل الفرق بين مربعين.

$$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$$

مثـــــال (2)

(1) $x^2 - 16 = x^2 - (4)^2 = (x - 4)(x + 4)$

(2) $2x^2 - 10 = 2(x^2 - 5) = 2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

(3) $4y^2 - 9x^2 = (2y + 3x)(2y - 3x)$

(4) $x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$

لاحظ أن الجزء الرابع من المثال يمكن تحليله إلى صورة أبسط من ذلك (فرق ومجموع مكعبين) وسنشرح ذلك في الجزء التالي.

مثـــــال (3)

حلل المقدار التالي:

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

الحل

بالنظر إلى المقدار المعطى لأول وهلة قد نجد صعوبة في تحليل المقدار ولكن إذا قمنا بتقسيم المقدار إلى جزئين أحدهما يمكن أخذ عامل مشترك منه وجزء آخر كما يلي:

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = \underbrace{(x^3 - 2x^2)}_{\text{جزء أول}} - \underbrace{(4x - 8)}_{\text{جزء ثاني}}$$
$$= x^2(x - 2) - 4(x - 2)$$

عند النظر إلى هذه الخطوة نجد لدينا عامل مشترك جديد وهو $(x - 2)$ وبالتالي فإن المقدار سيصبح على النحو التالي:

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x^2 \underbrace{(x - 2)}_{\text{عامل مشترك}} - 4 \underbrace{(x - 2)}_{\text{عامل مشترك}}$$
$$= (x - 2)\underbrace{(x^2 - 4)}_{\text{فرق بين مربعين}}$$

وهنا ظهر لنا مقدار يحتوي على فرق بين مربعين يمكن تحليله أيضاً ويصبح المقدار على الصورة:

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x - 2)(x - 2)(x + 2)$$
$$= (x - 2)^2(x + 2)$$

ملحوظة (1)

لاحظ أن المقدار

$$a^2 + b^2 \neq (a + b)(a + b)$$

أي أنه لا يمكن تحليل مجموع مربعين.

قواعد التحليل
(Factorization Rules)

(ج) **مجموع مكعبين (Sum of two Cubes):**

إذا كان لدينا مقداراً على هيئة مجموع مكعبين نستخدم القانون التالي لتحليله:

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

عبارة عند قوسين القوس الأول عبارة عن الجذر التكعيبي لكل من a^3, b^3 أما القوس الثاني هو عبارة مربع الأول و(الأول في الثاني بعكس الإشارة) ومربع الأخير.

مثـــال (4)

(1) $y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

(2) $8y^3 + 64x^3 = (2y)^3 + (4x)^3$
$= (2y + 4x)(4y^2 - 8xy + 16x^2)$

(3) $24x^3 + 3y^3 = 3(8x^3 + y^3)$
$= 3(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

(4) $125 + x^3 = (5)^3 + x^3 = (5 + x)(25 - 5x + x^2)$

(5) $y^6 + z^6 = (y^2)^3 + (z^2)^3$
$= (y^2 + z^2)(y^4 - y^2z^2 + z^4)$

(6) $8x^2y^5 + 27x^5y^2 = x^2y^2(8y^3 + 27x^3)$
$= x^2y^2(2y + 3x)(4y^2 - 6xy + 9x^2)$

قواعد التحليل
(Factorization Rules)

(د) **الفرق بين مكعبين (Difference between two Cubes):**

إذا كان لدينا مقداراً على هيئة فرق بين مكعبين نستخدم القانون التالي لتحليله:

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

عبارة عند قوسين القوس الأول عبارة عن الجذر التكعيبي لكل من a^3, b^3 أما القوس الثاني هو عبارة مربع الأول و(الأول في الثاني بعكس الإشارة) ومربع الأخير.

مثـــال (5)

(1) $x^3 - 125 = x^3 - (5)^3 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

(2) $3y^3 - 24x^3 = 3(y - 2x)(y^2 + 2yx + 4x^2)$

(3) $y^3 - 64 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$

(4) $8x^2y^5 - 27x^5y^2 = x^2y^2(8y^3 - 27x^3)$
$= x^2y^2(2y - 3x)(4y^2 + 6xy + 9x^2)$

(5) $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

قواعد التحليل
(Factorization Rules)

(هـ) المربع الكامل (Perfect Squares):

إذا كان لدينا مقداراً على هيئة مربع كامل نستخدم القانون التالي لتحليله:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

أي أن تحليل المربع الكامل هو عبارة تربيع الحد الأول و(الأول في الثاني مضروبا في 2) ثم تربيع الحد الثاني.

مثـــــال (6)

(1) $(x+4)^2 = x^2 + 2(4)x + (4)^2 = x^2 + 8x + 16$

(2) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

(3) $(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

(4) $(x+2y)^2 = x^2 + 4yx + 4y^2$

(5) $(2x+5)^2 = 4x^2 + 20x + 25$

مثـــــال (7)

حول المقادير التالية إلى صورة مقدار مربع كامل:

(1) $x^2 + 2x + 1,$ (2) $y^2 + 6y + 9$

(3) $9z^2 - 24z + 16,$ (4) $y^2 + 5y + 25$

الحل

عند تحويل مقدار إلى مربع كامل ننظر للحد الأول ونأخذ الجذر التربيعي له وننظر إلى الحد الأخير ونأخذ الجذر التربيعي له ونضع بينهما إشارة الحد الأوسط ونضع كل ما سبق بين قوسين ونضع تربيع على المقدار ما بين القوسين.

$$(1)\quad x^2 + 2x + 1 = \Big(\underbrace{x}_{\text{جذر الحد الأول}} \quad \underbrace{+}_{\text{اشارة الحد الأوسط}} \quad \underbrace{1}_{\text{جذر الحد الأخير}}\Big)^2$$

$$= (x+1)^2$$

ونقوم باختبار نهائي لمعرفة ما إذا قمنا به صحيح أو خاطئ وذلك عن طريق فك المربع الكامل الذي حصلنا عليه، ونقارن الناتج بالمعطى.

(1) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

(2) $y^2 + 6y + 9 = (y+3)^2 = y^2 + 6y + 9$

(3) $9z^2 - 24z + 16 = (3z-4)^2 = 9z^2 - 24z + 16$

(4) $y^2 + 5y + 25 \neq (y+5)^2 = y^2 + 10y + 25$

لاحظ أن الجزء الرابع لا يمكن وضعه على هيئة مربع كامل وهذا من الأخطاء الشائعة عند التعامل مع المربع الكامل.

الاختبار الذاتي (6)

Self-Test (6)

اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) عند تحليل المقدار $3x^2 + 6x$ نحصل على:

a. $3x(x+3)$ b. $3x(x+2)$ c. $x(3x+2)$

(ب) عند تحليل المقدار $2x^2 - 32$ نحصل على:

a. $2(x-4)(x-4)$ b. $2(x+4)(x+4)$ c. $2(x-4)(x+4)$

(ج) عند تحليل المقدار $x^3 + 2$ نحصل على:

a. $(x+\sqrt[3]{2})(x^2 - x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$ b. $(x+\sqrt[3]{2})(x^2 + x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$ c. $(x+\sqrt[3]{2})(x^2 + x\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})$

(د) عند تحليل المقدار $x^8 - 1$ نحصل على:

a. $(x^4+1)(x^2-1)(x+1)(x-1)$

b. $(x^4-1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

c. $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

(هـ) المربع الكامل للمقدار $x^2 - 2xy + y^2 + 2xz - 2yz + z^2$

a. $(x+y-z)^2$ b. $(x-y+z)^2$ c. $(x-y-z)^2$

تمـــــــارين

Exercises

1. حلل المقادير التالية:

a. $5x^2 - 10x$

b. $x^2 - 16$

c. $2x^2 - 32$

d. $25x^2 - 9y^2$

e. $x^3 - 27$

f. $x^6 - 8y^3$

g. $64 - y^2$

h. $x^3 + 125$

i. $3x^3 + 24y^2$

j. $x^2 - 14x + 49$

k. $9x^2 - 81$

l. $x^2 - 16x + 64$

m. $x^2 - 12x + 36$

n. $3x^3 - 12x^2 + 12x$

o. $x^2 - 2x + 1$

p. $4x^3 - 200$

q. $x^6 + 1$

r. $8x^3 - 27y^3$

الباب الثاني

التحليل

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

الفصل الثاني

تحليل المقدار الثلاثي

الفصل الثاني : تحليل المقدار الثلاثي

محتويات الفصل

الفصل الثاني: تحليل المقدار الثلاثي

Section (2): Factorization of a Trinomial

المقدار الثلاثي البسيط
(Simple Trinomial)

المقدار الثلاثي هو عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثانية على الصورة

$$ax^2 + bx + c$$

حيث أن $a, b, c \in R$ ، $a \neq 0$، ويعتمد تحليل هذا المقدار على العوامل a, b, c ويكون هذا المقدار بسيطاً إذا كان $a = 1$ وهذا يعني أنه يمكن تحليله لعوامله بمجرد النظر معتمدين في ذلك على الحد الأخير أو الحد المطلق أو الحد الخالي من قوى x مع إشارته أي $+c$ حيث يتم البحث عن عددين حاصل ضربهما $+c$ ومجموعهما b (وجود $+c$) أو الفرق بينهما b (وجود $-c$) والناتج يكون قيمة معامل في x الحد الأوسط بإشارته ونوضح ذلك بمجموعة من الأمثلة.

مثـــال (1)

حلل المقدار التالي:

$$x^2 + 8x + 12$$

الحل

عند تحليل الحد المطلق (12) إلى عاملين فقط نجد أن:

$$12 = \underbrace{(+2) \times (+6)}_{+8 \text{ عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(+3) \times (+4)}_{+7 \text{ عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(+12) \times (+1)}_{+13 \text{ عاملين مجموعهما}}$$

$$= \underbrace{(-2) \times (-6)}_{-8 \text{ عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(-3) \times (-4)}_{-7 \text{ عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(-12) \times (-1)}_{-13 \text{ عاملين مجموعهما}}$$

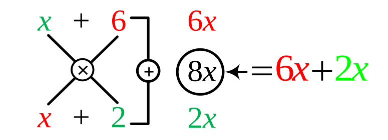
وبالرجوع إلى الشرح السابق فإننا نريد عاملين حاصل ضربهما $(+12)$ ومجموعهما الجبري $(+8)$ وهو يمثل معامل الحد الأوسط في المقدار، ولذلك نختار العاملين $(2,6)$ لأن:

$$12 = (+2) \times (+6), \qquad +2 + 6 = 8$$

وبذلك يمكن تحليل المقدار الثلاثي كالآتي:

$$x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$$

يمكن بطريقة سهلة ومبسطة عمل الآتي:



$$x^2 + 8x + 12$$
$$= (x + 2)(x + 6)$$



الطوسي

هو نصير الدين محمد بن محمد بن الحسن الطوسي فلكي ورياضي ومنجم وفيلسوف وجغرافي، ولد في طوس قرب نيسابور (إيران) عام (597هـ-120م) وتوفي في قرية المراغة (إيران) عام (673هـ-1274م)

أهم مؤلفاته:

كتاب في شرح الجبر والمقابلة، كتاب تحرير إقليدس، كتاب الشكل والقطاع، كتاب التذكرة بالأعمال الهندسية، كتاب مساحة الأشكال البسيطة والكروية.

مثـــال (2)

➢ حلل المقدار:

$$x^2 - 8x + 12$$

الحل

➢ هذا المثال هو نفس المثال السابق مع اختلاف في إشارة الحد الأوسط (-8) ولذلك عند تحليل الحد المطلق (12) إلى عاملين فقط نجد أن:

$$12 = \underbrace{(+2)\times(+6)}_{\text{عاملين مجموعهما } +8} = \underbrace{(+3)\times(+4)}_{\text{عاملين مجموعهما } +7} = \underbrace{(+12)\times(+1)}_{\text{عاملين مجموعهما } +13}$$

$$= \underbrace{(-2)\times(-6)}_{\text{عاملين مجموعهما } -8} = \underbrace{(-3)\times(-4)}_{\text{عاملين مجموعهما } -7} = \underbrace{(-12)\times(-1)}_{\text{عاملين مجموعهما } -13}$$

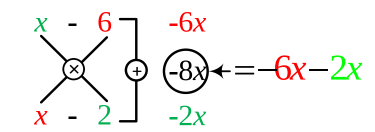
ولذلك نختار العاملين $(-2, -6)$ لأن:

$$12 = (-2)\times(-6), \qquad -2 - 6 = -8$$

وبذلك يمكن تحليل المقدار الثلاثي كالآتي:

$$x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$$

وبنفس الطريقة السابقة المشروحة في المثال الأول نجد أن:



$$x^2 - 8x + 12$$
$$= (x-2)(x-6)$$

مثـــال (3)

➢ حلل المقدار التالي:

$$x^2 - x - 12$$

الحل

➢ في هذا المثال نجد أن المطلوب الحصول على عاملين حاصل ضربهما (-12) ومجموعهما الجبري يساوي (-1) وهو معامل الحد الأوسط ولذلك عند تحليل الحد المطلق إلى عاملين نجد أن:

$$-12 = \underbrace{(-2)\times(+6)}_{\text{عاملين مجموعهما } +4} = \underbrace{(-6)\times(+2)}_{\text{عاملين مجموعهما } -4} = \underbrace{(-4)\times(+3)}_{\text{عاملين مجموعهما } -1}$$

$$= \underbrace{(-3)\times(+4)}_{\text{عاملين مجموعهما } +1} = \underbrace{(-12)\times(+1)}_{\text{عاملين مجموعهما } -11} = \underbrace{(+12)\times(-1)}_{\text{عاملين مجموعهما } +11}$$

ولذلك نختار العاملين $(-4, +3)$ لأن:

$$-12 = (-4)\times(+3), \qquad -4 + 3 = -1$$

وبذلك يمكن تحليل المقدار الثلاثي كالآتي:

$$x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$$

x - 4 | -4x
x + 3 | +3x
-x = -4x + 3x

$$x^2 - x + 12$$
$$= (x-4)(x+3)$$

مثـــال (4)

➢ حلل المقدار التالي:

$$x^2 + x - 12$$

الحل

➢ هذا المثال هو نفس المثال السابق مع اختلاف إشارة الحد الأوسط ولذلك نجد أن المطلوب الحصول على عاملين حاصل ضربهما (-12) ومجموعهما الجبري يساوي $(+1)$ وهو معامل الحد الأوسط ولذلك عند تحليل الحد المطلق إلى عاملين نجد أن:

$$-12 = \underbrace{(-2)\times(+6)}_{+4\ \text{عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(-6)\times(+2)}_{-4\ \text{عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(-4)\times(+3)}_{-1\ \text{عاملين مجموعهما}}$$

$$= \underbrace{(-3)\times(+4)}_{+1\ \text{عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(-12)\times(+1)}_{-11\ \text{عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(+12)\times(-1)}_{+11\ \text{عاملين مجموعهما}}$$

ولذلك نختار العاملين $(-3, +4)$ لأن:

$$-12 = (-3)\times(+4), \quad -3+4 = +1$$

وبذلك يمكن تحليل المقدار الثلاثي كالآتي:

$$x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$$

x + 4, x - 3 → $+4x$, $-3x$ → $(+x) = +4x - 3x$

$x^2 + x - 12$
$= (x-3)(x+4)$

مثـــــال (5)

حلل المقدار التالي:

$$x^2 + 4x - 12$$

الحل

في هذا المثال المطلوب الحصول على عاملين حاصل ضربهما (-12) ومجموعهما الجبري $(+4)$ وبنفس الخطوات السابقة المشروحة في الأمثلة وبالتجربة نجد أن:

$$-12 = (+6)\times(-2), \quad +6-2 = +4$$

وبالتالي فإن ناتج تحليل المقدار هو:

$$x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$$

x + 6, x - 2 → $6x$, $-2x$ → $(4x) = 6x - 2x$

$x^2 + 4x - 12$
$= (x+6)(x-2)$

مثـــــال (6)

حلل المقدار التالي:

$$x^2 - 7x - 18$$

الحل

عند تحليل الرقم (-18) إلى عاملين نجد أن:

$$-18 = \underbrace{(-2)\times(+9)}_{+7\ \text{عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(+2)\times(-9)}_{-7\ \text{عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(-3)\times(+6)}_{+3\ \text{عاملين مجموعهما}}$$

$$= \underbrace{(+3)\times(-6)}_{-3\ \text{عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(-18)\times(+1)}_{-17\ \text{عاملين مجموعهما}} = \underbrace{(+18)\times(-1)}_{+17\ \text{عاملين مجموعهما}}$$

بالتجربة نجد أن حاصل ضرب $(-9,2)$ هو (18) ومجموعهما (-7) ولذلك فإن:

$$x^2 - 7x - 18 = (x-9)(x+2)$$

x - 9, x + 2 → $-9x$, $2x$ → $(-7x) = -9x + 2x$

$x^2 - 7x - 18$
$= (x-9)(x+2)$

مثـــــال (7)

حلل المقدار التالي:

$$3x^2 + 27x + 54$$

الحل

عند النظر في هذا المثال نجد أن معامل x^2 لا يساوي الواحد الصحيح ولذلك سنأخذ عاملاً مشتركاً من جميع حدود المقدار الثلاثي ليصبح على الصورة:

$$3(x^2 + 9x + 18)$$

عند تحليل الرقم $(+18)$ إلى عاملين نجد أن:

$$18 = \underbrace{(+2)\times(+9)}_{\text{عاملين مجموعهما } +11} = \underbrace{(+3)\times(+6)}_{\text{عاملين مجموعهما } +9} = \underbrace{(+1)\times(+18)}_{\text{عاملين مجموعهما } +19}$$

$$= \underbrace{(-2)\times(-9)}_{\text{عاملين مجموعهما } -11} = \underbrace{(-3)\times(-6)}_{\text{عاملين مجموعهما } -9} = \underbrace{(-18)\times(-1)}_{\text{عاملين مجموعهما } -19}$$

ومن ذلك نختار العاملين $(3,6)$ لأن حاصل ضربهما 18 ومجموعهما 9 وينتج أن:

$$3(x^2 + 9x + 18) = 3(x+3)(x+6)$$

x + 3 3x
x + 6 6x
9x = 6x + 3x

$3(x^2 + 9x + 18)$
$= 3(x+3)(x+6)$

مثـــــال (8)

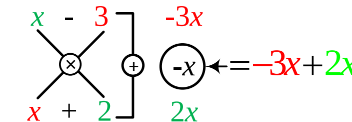
حلل المقدار التالي:

$$x^2 - x - 6$$

الحل

بمجرد النظر للمثال نجد أن $(-3,2)$ حاصل ضربهما (-6) ومجموعهما (-1) ولذلك:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$



$x^2 - x - 6$
$= (x-3)(x+2)$

مثـــــال (9)

حلل المقدار التالي:

$$x^2 + x + 1$$

الحل

عند النظر إلى عوامل هذا المقدار ومحاولة الحصول على عاملين حاصل ضربهما $(+1)$ والذي يمثل الحد المطلق وفي نفس الوقت يجب أن يكون مجموعهما $(+1)$ معامل الحد الأوسط فإنك مهما حاولت لن تستطيع تحقيق الشرطين معاً، ولذلك ليس كل مقدار ثلاثي يقبل التحليل لعاملين وهذا واضح من فرق ومجموع مكعبين حيث أحد العاملين مقدار ثلاثي غير قابل للتحليل.

مثـــــال (10)

حلل المقدار التالي:

$$2x^3 - 20x^2 + 32x$$

الحل

عند النظر لهذا المثال نجد أن كثيرة حدود من الدرجة الثالثة وليس من الدرجة الثانية كما ذكرنا وأيضاً نجد أن معامل الحد الأول لا يساوي الواحد الصحيح، ولذلك سنأخذ عاملاً مشتركاً من جميع حدود المقدار الثلاثي $(2x)$ ليصبح على الصورة:

$$2x^3 - 20x^2 + 32x = 2x(x^2 - 10x + 16)$$

يصبح لدنا مقداراً ثلاثياً عادياً يمكن تحليله ولذلك نجد أن العاملين $(-2,-8)$ حاصل ضربهما هو (16) ومجموعهما الجبري هو (-10) ولذلك يمكن كتابة المقدار على الصورة:

$$2x^3 - 20x^2 + 32x = 2x(x-2)(x-8)$$

المقدار الثلاثي الغير بسيط

(Non-Simple Trinomial)

كما ذكرنا في بداية الفصل أن المقدار الثلاثي هو عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثانية على الصورة

$$ax^2 + bx + c$$

حيث أن $a \neq 0, \quad a, b, c \in R$، حيث يعتمد تحليل هذا المقدار على العوامل a, b, c ويكون هذا المقدار غير بسيط إذا كان $a \neq 1$ وفي مثل هذه الحالة نستخدم نفس الطريقة السابقة مع الأخذ في الاعتبار أن الحد الأول سيؤثر في طريقة الحل، وسنبين ذلك بمجموعة من الأمثلة.

مثـــال (11)

حل المقدار التالي:

$$3x^2 - 5x - 2$$

الحل

حل هذه النوعية من المسائل يعتمد على احتمالات الإجابة ولذلك بالتجربة نجد أن:

$$(1) \times (x) + (-2) \times (3x) = -5x$$

ولذلك يصبح المقدار بعد تحليله على الصورة:

$$3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$$

مثـــال (12)

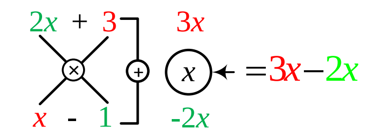
حل المقدار:

$$2x^2 + x - 3$$

الحل

بالنظر إلى عوامل المقدار وبالتجربة نجد أن:

$$(3) \times (x) + (-1)(2x) = x$$



ولذلك يصبح المقدار بعد تحليله على الصورة:

$$2x^2 + x - 3 = (2x + 3)(x - 1)$$

مثـــال (13)

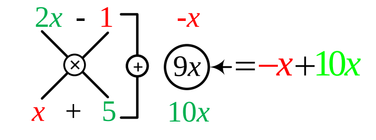
حل المقدار:

$$2x^2 + 9x - 5$$

الحل

بمجرد النظر إلى عوامل المقدار نجد أن:

$$(-1) \times (x) + (5) \times (2x) = 9x$$



ولذلك يصبح المقدار بعد تحليله على الصورة:

$$2x^2 + 9x - 5 = (2x - 1)(x + 5)$$

مثـــال (14)

حل المقدار:

$$8y^2 - 2y - 3$$

الحل

بمجرد النظر إلى عوامل المقدار نلاحظ أن:

$$(3)(-2y) + (1)(4y) = -2y$$

وبالتالي يصبح المقدار بعد تحليله على الصورة:

$$8y^2 - 2y - 3 = (4y - 3)(2y + 1)$$

مثـــال (15)

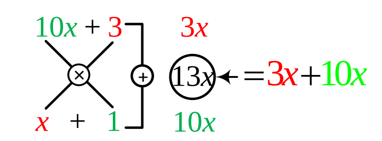
حلل المقدار:

$$10x^2 + 13x + 3$$

الحل

بمجرد النظر إلى عوامل المقدار نجد أن:

$$(3) \times (x) + (1) \times (10x) = 13x$$



ولذلك يصبح المقدار بعد تحليله على الصورة:

$$10x^2 + 13x + 3 = (10x + 3)(x + 1)$$

مثـــال (16)

حلل المقدار:

$$4x^4 + 2x^3 - 6x^2$$

الحل

بالنظر إلى هذا المقدار نجد أنه مقدار ثلاثي ولكن من الدرجة الرابعة ولذلك أولاً نأخذ عاملاً مشتركاً لتحويله إلى مقدار ثلاثي من الدرجة الثانية على النحو التالي:

$$4x^4 + 2x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x^2 + x - 3)$$

نلاحظ أن ما بداخل القوسين عبارة عن مقدار ثلاثي من الدرجة الثانية وفيه معامل x^2 لا يساوي الواحد الصحيح ولذلك سنبحث عن عوامل حاصل جمعها معامل x وبالتجربة وجدنا أن:

$$(3)(x) + (-1)(2x) = x$$

وبالتالي يصبح المقدار بعد تحليله في الصورة:

$$4x^4 + 2x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x + 3)(x - 1)$$

الاختبار الذاتي (7)

Self-Test (7)

اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) عند تحليل المقدار $x^2 - 5x + 6$ نحصل على:

a. $(x-3)(x+2)$ b. $(x+3)(x+2)$ c. $(x-3)(x-2)$

(ب) عند تحليل المقدار $x^2 - 10x + 16$ نحصل على:

a. $(x-8)(x-2)$ b. $(x+8)(x-2)$ c. $(x-8)(x+2)$

(ج) عند تحليل المقدار $x^2 + 7x - 18$ نحصل على:

a. $(x-9)(x+2)$ b. $(x-9)(x-2)$ c. $(x+9)(x-2)$

(د) عند تحليل المقدار $2y^2 + y - 3$ نحصل على:

a. $(2y+3)(y-1)$ b. $(2y+3)(y+1)$ c. $(2y-3)(y-1)$

(هـ) عند تحليل المقدار $y^2 - 3y - 28$ نحصل على:

a. $(y-7)(y-4)$ b. $(y-7)(y+4)$ c. $(y+7)(y+4)$

(و) عند تحليل المقدار $3x^2 - 5x + 2$ نحصل على:

a. $(3x-2)(x-1)$ b. $(-3x+2)(x-1)$ c. $(3x-2)(x+1)$

(ز) عند تحليل المقدار $10x^2 - 11x + 3$ نحصل على:

a. $(5x-3)(-2x-1)$ b. $(5x-3)(2x-1)$ c. $(5x+3)(2x-1)$

(ح) عند تحليل المقدار $2x^3 - 10x^2 + 12x$ نحصل على:

a. $2x(x-3)(x+2)$ b. $2x(x+3)(x+2)$ c. $2x(x-3)(x-2)$

تمـــــــارين
Exercises

1. حلل المقادير التالية:

a. $x^2 - x - 20$

b. $x^2 + 3x + 2$

c. $x^2 + x - 6$

d. $3x^2 - x - 10$

e. $x^2 - 11x + 18$

f. $5x^2 + 9x - 15$

g. $9x^2 + 15x + 20$

h. $9x^2 - 24x + 16$

i. $10x^2 - 24x + 8$

j. $2x^2 - x - 15$

k. $2x^2 - 9x - 5$

l. $8x^2 + 2x - 3$

m. $3x^2 + 5x - 2$

n. $3x^2 - 5x - 2$

o. $3x^2 - 15x - 108$

p. $x^2 - 10x + 16$

q. $x^2 + 7x + 12$

r. $x^2 - x - 6$

s. $x^2 - 9x - 20$

t. $x^2 + 8x - 20$

الباب الثاني

التحليل

الفصل الثالث

تبسيط المقادير الجبرية

الفصل الثالث : تبسيط المقادير الجبرية

محتويات الفصل

الفصل الثالث: تبسيط المقادير الجبرية

Section (3): Simplifying Algebraic Expressions

يمكن تبسيط المقادير الجبرية بنفس طريقة تبسيط الكسور العددية التي تحدثنا عنا في الباب الأول، فعند جمع أو طرح الكسور نقوم بتوحيد المقامات إذا كانت مختلفة، وذلك عن طريق تحليل كل مقام إلى عوامله الأولية ثم نوجد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات، والذي يتكون من حاصل ضرب العوامل الأولية التي تتكون منها المقامات مأخوذة بأكبر أس لكل عامل ونضرب الناتج في بسط ذلك المقام.

وفي حالة ضرب وقسمة الكسور، يتم تحليل بسط ومقام كل مقدار كسري ثم نختصر العوامل المتشابهة ويتم تحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب بقلب المسوم عليه، والأمثلة التالية ستوضح لنا ذلك.

مثـــــال (1)

ضع المقدار التالي في أبسط صورة:

$$\frac{x+4}{x^2-x-2}+\frac{3}{x+1}$$

الحل

نوجد مقاماً مشتركاً للكسرين وذلك على النحو التالي:

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{(x-2)(x+1)}+\frac{3}{x+1} &= \frac{x+4}{(x-2)(x+1)}+\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+1)}\\ &= \frac{x+4+3(x-2)}{(x-2)(x+1)}\\ &= \frac{x+4+3x-6}{(x-2)(x+1)}\\ &= \frac{4x-2}{(x-2)(x+1)}\end{aligned}$$

نلاحظ هنا أن مقام الكسر الثاني هو أحد عوامل مقام الكسر الأول

مثـــــال (2)

ضع المقدار التالي في أبسط صورة:

$$\frac{1}{x^2-4x}+\frac{x-1}{x^2-16}$$



ابن الهائم

عالم عربي مسلم، هو أبو العباس شهاب الدين أحمد بن عماد الدين بن علي، المعروف بابن الهائم اشتهر بالرياضيات، ولد بمصر سنة 753هـ وتوفي فيها سنة 815هـ وهو رياضي، وحاسب وفقيه.

من أهم مؤلفاته: (رسالة اللمع في الحساب)، (كتاب حاو في الحساب)، (كتاب المعونة في الحساب الهوائي)، (مرشد الطالب إلى أسنى المطالب) في الحساب، (كتاب المقنع) وهو قصيدة قوامها 59 بيتاً من الشعر في الجبر. ألف كتابا في القواعد اسمه مرشد الطلاب في قواعد الإعراب كتبه وعمره 39 سنة عام 795هـ.

الحل

بتحليل مقامي الكسرين ثم أخذ العامل المشترك الأصغر من المقامين نجد أن:

$$\frac{1}{x^2-4x}+\frac{x-1}{x^2-16}=\frac{1}{x(x-4)}+\frac{x-1}{(x-4)(x+4)}$$
$$=\frac{x+4}{x(x-4)(x+4)}+\frac{x(x-1)}{x(x-4)(x+4)}$$
$$=\frac{x+4+x^2-x}{x(x-4)(x+4)}=\frac{x^2+4}{x(x-4)(x+4)}$$

لاحظ في هذا المثال أن المقام المشترك هو:

$$x(x-4)(x+4)$$

مثـــــال (3)

أوجد ناتج المقدار:

$$(2x+5)^2-(x+5)^2$$

الحل

في هذا المثال نقوم بفك القوس الأول ثم القوس الثاني ثم نقوم بتجميع الحدود المتشابهة جبرياً وذلك على النحو التالي:

$$(2x+5)^2-(x+5)^2=\underbrace{4x^2+20x+25}_{\text{ناتج القوس الأول}}\underbrace{-x^2-10x-25}_{\text{ناتج القوس الثاني}}$$
$$=3x^2+10x$$

لاحظ اختفاء الحد المطلق أو الحد الذي لا يحتوي على قوى x

مثـــــال (4)

أوجد ناتج المقدار التالي:

$$\frac{x}{5}-\frac{x}{x+5}$$

الحل

المقام المشترك للكسرين هو $5(x+5)$ وبالتالي فإن المقدار:

$$\frac{x}{5}-\frac{x}{x+5}=\frac{x(x+5)-x(5)}{5(x+5)}=\frac{x^2+5x-5x}{5(x+5)}=\frac{x^2}{5(x+5)}$$

يمكن حل هذا المثال بطريقة سهلة (طريقة المقص) بحيث أن البسط النهائي هو عبارة عن بسط الكسر الأول مضروباً في مقام الكسر الثاني ثم نطرح من ذلك بسط الكسر الثاني بعد ضربه في مقام الكسر الأول.

مثـــــال (5)

أوجد ناتج المقدار التالي في أبسط صورة:

$$\frac{(x-4)^2}{(x+4)^2}-\frac{(x+2)^2}{(x+4)^2}$$

الحل

بالنظر إلى هذا المثال نجد أن للكسرين مقاماً مشتركاً واحداً $(x+4)^2$ وبالتالي وبطريقة مباشرة نجري العملية الجبرية على النحو التالي:

$$\frac{(x-4)^2}{(x+4)^2}-\frac{(x+2)^2}{(x+4)^2}=\frac{(x-4)^2-(x+2)^2}{(x+4)^2}$$

وبفك أقواس البسط وتبسيطها عن طريق جمع الحدود الجبرية المتشابهة نحصل على:

$$\frac{(x-4)^2}{(x+4)^2}-\frac{(x+2)^2}{(x+4)^2}=\frac{x^2-8x+16-(x^2+4x+4)}{(x+4)^2}$$
$$=\frac{x^2-8x+16-x^2-4x-4}{(x+4)^2}$$
$$=\frac{-12x+12}{(x+4)^2}=\frac{12(1-x)}{(x+4)^2}$$

لاحظ في البسط اختفاء الحد الذي يحتوي على قوى x^2

مثـــــال (6)

أوجد ناتج المقدار التالي في ابسط صورة:

$$\frac{7}{x-y}+\frac{8}{y-x}$$

الحل

بالنظر إلى مقامي الكسرين نجد أنهما متساويين مع اختلاف إشارة حدود كل منهما ولذلك يمكن كتابة المقدار على الصورة:

$$\frac{7}{x-y}+\frac{8}{y-x}=\frac{7}{x-y}-\frac{8}{x-y}$$

لاحظ هنا:

$$(y-x)=-(x-y)$$

وبهذا الطريقة نجد أن كلاً من الكسرين يحتوي على نفس المقام وبالتالي نجري العملية الجبرية:

$$\frac{7}{x-y}+\frac{8}{y-x}=\frac{7}{x-y}-\frac{8}{x-y}=\frac{7-8}{x-y}=\frac{-1}{x-y}$$

مثـــــال (7)

ضع المقدار التالي في أبسط صورة ممكنة:

$$\frac{2}{x^2-6x+9}-\frac{x+1}{3x-9}$$

الحل

عند النظر في هذا المثال نجد أن مقام الكسر الأول يمكن تحليله إلى مربع كامل:

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

ومقام الكسر الثاني يحتوي على عامل مشترك (3) وبالتالي يمكن كتابة المقدار المعطى على الصورة:

$$\frac{2}{x^2-6x+9}-\frac{x+1}{3x-9}=\frac{2}{(x-3)^2}-\frac{x+1}{3(x-3)}$$

من ذلك ينتج أن المقام المشتر للكسرين معاً هو $3(x-3)^2$ وبالتالي فإن المقدار:

$$\frac{2}{x^2-6x+9}-\frac{x}{3x-9}=\frac{(3)(2)}{3(x-3)^2}-\frac{(x-3)(x+1)}{3(x-3)^2}$$
$$=\frac{6-x^2+2x+3}{3(x-3)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+9}{3(x-3)^2}=\frac{-(x^2-2x-9)}{3(x-3)^2}$$

لاحظ أن الناتج الأخير يحتوي على بسط عبارة مقدار ثلاثي لا يمكن تحليله بالطرق التي تعلمناها في الفصل السابق وذلك لأننا لا نستطيع الحصول على عاملين من عوامل (-9) مجموعهما (-2)

مثـــــال (8)

ضع المقدار التالي في ابسط صورة:

$$\frac{4}{(x^2-25)}+\frac{5}{(x+5)}$$

الحل

بالنظر للمقدار نجد ان مقام الكسر الأول عبارة عن قوس يحتوي على مقدار فرق بين مربعين أما مقام الكسر الثاني فهو أحد عوامل مقام الكسر الأول بالتالي فإن المقام المشترك لدنيا هو $(x-5)(x+5)$

$$\frac{4}{(x^2-25)}+\frac{5}{x+5}=\frac{4+5(x-5)}{(x-5)(x+5)}$$
$$=\frac{4+5x-25}{(x-5)(x+5)}$$
$$=\frac{5x-21}{(x-5)(x+5)}$$

مثـــــال (9)

ضع المقدار التالي في ابسط صورة:

$$\frac{x^2-9}{x^3+27}\times\frac{x^2-3x+9}{x^2-6x+9}$$

الحل

ذكرنا في بداية الفصل الطريقة المتبعة عند ضرب المقادير الجبرية و بالنظر للكسر الأول نجد أنه يحتوى على مقام عبارة عن مجموع مكعبين (x^3+27)وبسط عبارة عن فرق بين مربعين وبتحليل البسط والمقام نجد ان

$$\frac{x^2-9}{x^3+27}\times\frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x^2-3x+9)}=\frac{(x-3)}{x^2-3x+9}$$

وهذه هي أبسط صورة ممكنة للكسر الأول أما الكسر الثاني فنجد أن المقام عبارة عن مقدار ثلاثي مربع كامل والبسط أيضا عبارة عن مقدار ثلاثي ولكن لا يمكن تحليله، ولذلك نجد أنه يمكن كتابة الكسر الثاني على الصورة:

$$\frac{x^2-3x+9}{x^2-6x+9}=\frac{x^2-3x+9}{(x-3)^2}$$

من ذلك نجد أن

$$\frac{x^2-9}{x^3+27}\times\frac{x^2-3x+9}{x^2-6x+9}=\frac{(x-3)}{x^2-3x+9}\times\frac{x^2-3x+9}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{1}{(x-3)}$$

لاحظ في آخر المثال أنه تم اختصار الناتج عن طريق القسمة بسطاً ومقاماً على العوامل المشتركة.

مثـــال (10)

ضع المقدار التالي في أبسط صوره ممكنة:

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-9}\times\frac{5x+15}{x-4}$$

الحل

بعمل نفس الخطوات التي ذكرناها في المثال السابق نجد أن الكسر الأول:

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-9}=\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+3)}=\frac{(x-4)}{(x+3)}$$

أما الكسر الثاني فهو عبارة عن.

$$\frac{5x+15}{x-4}=\frac{5(x+3)}{(x-4)}$$

وبإجراء عملية الضرب المطلوبة نجد أن:

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-9}\times\frac{5x+15}{x-4}=\frac{(x-4)}{(x+3)}\times\frac{5(x+3)}{(x-4)}=5$$

مثـــال (11)

ضع المقدار الجبري التالي في أبسط صورة ممكنة:

$$\frac{81-y^2}{(9+y)}\times\frac{9-y}{(9-y)^2}$$

الحل

عند النظر لهذا المثال نجد أن بسط الكسر الأول هو عبارة عن فرق بين مربعين ويمكن وضعة على الصورة

$$(81-y^2)=(9-y)(9+y)$$

وبالتعويض في المقدار نجد أن

$$\frac{(81-y^2)}{(9-y)}\times\frac{9-y}{(9-y)^2}=\frac{(9-y)(9+y)}{(9+y)}\times\frac{9-y}{(9-y)^2}=1$$

مثـــال (12)

أوجد ناتج المقدار التالي:

$$\frac{3x-12}{2x+8}\div\frac{(x-4)^2}{(x+4)^2}$$

الحل

أولا لدنيا كسرين بينهما عملية قسمة ولذلك سنقوم بتحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب:

$$\frac{3x-12}{2x+8}\times\frac{(x+4)^2}{(x-4)^2}$$

$$\frac{3x-12}{2x+8}\div\frac{(x-4)^2}{(x+4)^2}=\frac{3(x-4)}{2(x+4)}\times\frac{(x+4)^2}{(x-4)^2}=\frac{3(x+4)}{2(x-4)}$$

لاحظ أن بسط الكسر الأول يحتوي على عامل مشترك (3) ومقامة على عامل مشترك (2)

مثـــــال (13)

ضع المقدار التالي في أبسط صورة:

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} \div \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$$

الحل

في هذا المثال سنقوم بتحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب مع تحليل بسط ومقام الكسر الأول فالبسط عبارة عن فرق بين مكعبين والمقام عبارة عن فرق بين مربعين أما لكسر الثاني فمقامه يحتوي على مقدار ثلاثي عبارة عن مربع كامل أما البسط فلا يمكن تحليله ولذلك نجد أن.

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} \div \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x+1)^2}{(x^2+x+1)}$$

وبقسمة كلاً من البسط والمقام على العوامل المشتركة نجد أن:

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{(x+1)^2}{(x^2+x+1)} = (x+1)$$

مثـــــال (14)

ضع المقدار التالي في أبسط صورة ممكنة:

$$\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x} \div \frac{3x-6}{2x}$$

الحل

أولاً سنقوم بتحويل عملية القسمة إلى عملية ضرب:

$$\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x} \times \frac{2x}{3x-6}$$

بسط الكسر الأول عبارة عن مقدار ثلاثي يمكن تحليله على الصورة:

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

أما مقام الكسر الأول فيحتوي على عامل مشترك $(2x)$ ومقام الكسر الثاني يحتوي على عامل مشترك (3)، وبكتابة الكسرين بعد التحليل مع القسمة بسطاً ومقاماً على العوامل المشتركة نحصل على:

$$\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x} \times \frac{2x}{3x-6} = \frac{(x-2)(x-3)}{2x(x-3)} \times \frac{2x}{3(x-2)} = \frac{1}{3}$$

الاختبار الذاتي (8)

Self-Test (8)

اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) عند تبسيط المقدار $\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x^2-4}$ نحصل على:

a. $\frac{2(x+1)}{x^2-4}$　　b. $\frac{2(x-1)}{x^2-4}$　　c. $\frac{x-1}{x^2-4}$

(ب) عند تبسيط المقدار $\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x^2-4}$ نحصل على:

a. $-\frac{(3-x)}{x^2-4}$　　b. $\frac{2(3+x)}{x^2-4}$　　c. $\frac{2(3-x)}{x^2-4}$

(ج) عند تبسيط المقدار $\frac{2}{x+2}\div\frac{2}{x^2-4}$ نحصل على:

a. $\frac{1}{x+2}$　　b. $-\frac{1}{x-2}$　　c. $\frac{1}{x-2}$

(د) عند تبسيط المقدار $\frac{(x-4)}{(x+4)}\div\frac{x^2-16}{(x+4)}$ نحصل على:

a. $x-4$　　b. $x+4$　　c. $4-x$

(هـ) عند تبسيط المقدار $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{3x}$ نحصل على:

a. $\frac{4x^2+12x-9}{3x(x^2-9)}$　　b. $\frac{4x^2-6x+81}{3x(x^2-9)}$　　c. $\frac{x^2-4x+6}{3x(x^2-9)}$

(و) عند تبسيط المقدار $\frac{(x-1)}{(x+1)}\div\frac{x^2-1}{(x+1)}+\frac{1}{x-1}$ نحصل على:

a. $\frac{x^2}{x+1}$　　b. $\frac{x^2}{x-1}$　　c. $\frac{x^2+2x+2}{x+1}$

(ز) عند تبسيط المقدار $\frac{(x-1)}{(x+1)}\div\frac{x^2-1}{(x+1)}-\frac{1}{x-1}$ نحصل على:

a. $\frac{-(x^2+2x+1)}{x-1}$　　b. $\frac{-(x^2-2)}{x-1}$　　c. $\frac{-(x^2+2)}{x-1}$

تمـــــــارين
Exercises

1. ضع المقادير التالية في أبسط صورة ممكنة:

a. $\dfrac{2x}{x^2 - x - 20} + \dfrac{1}{x - 5}$

b. $\dfrac{3}{x^2 - 9} - \dfrac{3}{x + 3}$

c. $\dfrac{4x - 20}{x^3 - 125} - \dfrac{4}{x^2 + 5x + 25}$

d. $\dfrac{3x}{x^2 + 4x + 4} - \dfrac{3}{2x + 4}$

e. $\dfrac{1}{x^2 - 7x} + \dfrac{x - 1}{x^2 - 49}$

f. $\dfrac{x^2 - 16}{(x + 4)} \times \dfrac{(x + 4)}{(x - 4)}$

g. $\dfrac{x^2 - y^2}{xy} \div \dfrac{x - y}{y}$

h. $\dfrac{2}{3x} + \dfrac{7}{3x}$

i. $\dfrac{5}{x - 2} + \dfrac{4}{x^2 - 4}$

j. $\dfrac{x^2 - 9}{x^3 - 27} + \dfrac{x^2 + 3x + 9}{x^2 + 6x + 9}$

k. $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 9} \div \dfrac{x + 4}{5x - 15}$

l. $\dfrac{5}{x + 1} + \dfrac{10}{x^2 - 1} - 5$

m. $\dfrac{3}{x - 2} - \dfrac{2}{x + 2}$

الباب الثاني

التحليل



الفصل الرابع

تطبيقات

الفصل الرابع: تطبيقات

محتويات الفصل

الفصل الرابع: تطبيقات

Section (4): Applications

تدخل الرياضيات في تفاصيل حياتنا اليومية البسيطة منها والمعقدة. ففي الأمور البسيطة نتعرف على الوقت، وباقي نقودنا بعد شراء شيء ما، وفي الأمور المعقدة كتنظيم ميزانية البيت أو تسوية دفتر الشيكات. وتستخدم الحسابات الرياضية في الطبخ والقيادة والبستنة، والخياطة، ونشاطات عامة عديدة أخرى.

وللرياضيات دور هام في جميع الدراسات العلمية تقريباَ إذ تساعد العلماء على تصميم تجاربهم وتحليل بياناتهم ويستخدم العلماء الصيغ الرياضية لتوضيح ابتكاراتهم بدقة، ووضع التنبؤات المستندة إلى ابتكاراتهم كما تعتمد العلوم الإنسانية كالاقتصاد، وعلم النّفس، وعلم الاجتماع بقدر كبير على الإحصاء وأنواع أخرى في الرياضيات.

في مجال الصناعة، تساعد الرياضيات الصناعة في التصميم، والتطوير، واختبار جودة الإنتاج والعمليات التصنيعية. فالرياضيات ضرورية لتصميم الجسور، والمباني والسدود والطرق السريعة، والأنفاق، والعديد من المشاريع المعمارية والهندسية الأخرى.

في التجارة . تُسّتَخْدَم الرياضيات في المعاملات المتعلقة بالبيع والشراء. وتكمن حاجة الأعمال التجارية الى الرياضيات في حفظ سجلات المعاملات كمستويات الأسهم، وساعات عمل الموظفين ورواتبهم. ويستخدم المتعاملون مع البنوك الرياضيات لمعالجة واستثمار سيولتهم النقدية. وتساعد الرياضيات كذلك شركات التأمين في حساب نسبة المخاطرة وحساب الرسوم اللازمة لتغطية التأمين.

التطبيقات هو توضيح ما هي استخدامات علم الرياضيات حياتنا العملية في شتي المجالات الاقتصادية والإدارية والإحصاء وكذلك استخدام مبادئ الرياضيات في الأموال الشرعية مثل المعاملات التجارية في الإسلام وكذلك الزكاة وأنواعها من الأموال والتجارة والزروع وكيفية حساب الميراث من خلال القرآن الكريم والسنة النبوية الشريفة بعلم يسمى علم الفرائض ومن الضروري أن يشعر الطلاب بأهمية علم الرياضيات في الحياة بإعطاء أمثلة عملية من الحياة مستخدماً مبادئ الرياضيات مثل حساب نسبة الربح والخسارة في المشروعات التجارية، وكذلك كيفية حساب النسبة المئوية ومعرفة كيفية حساب معدله الدراسي.

(1) النسبة
(Ratio)

هي عملية مقارنة بين عددين أو كميتين من نفس النوع.

يمكن تبسيط المعنى بالقول أن النسبة بين عددين هي إيجاد قيمة العدد الأول بالنسبة للعدد الثاني فمثلاً النسبة بين العددين $(3,4)$ نريد معرفة قيمة العدد 3 بالنسبة للعدد 4 فيمكننا القول أن الوحدة الكاملة هنا قسمت إلى 4 أجزاء وأخذنا منها 3 أجزاء فنقول أننا أخذنا $\left(\frac{3}{4}\right)$ الوحدة ويمكن أيضا وضع النسبة في الصورة $3:4$.

- يجب مراعاة أن العدد الأول (3) يكون البسط ويسمى (المقدم) والعدد الثاني (4) يكون المقام ويسمى (التالي) ويمكن أن نسميه المقدار الكلى.
- عند التعامل مع مسائل النسبة لابد أن ندرك أننا نتعامل مع مجموعة أجزاء ولمعرفة القيمة الحقيقية لها لابد من معرفة قيمة الجزء الواحد.
- القيمة الحقيقية لمجموعة أجزاء = قيمة الجزء × عدد الأجزاء أو بطريقة أخرى،
- قيمة النسبة (القيمة الحقيقية لمجموعة أجزاء) = النسبة× المقدار الكلى.
- قيمة الجزء = القيمة الحقيقية ÷ عدد الأجزاء.
- عدد الأجزاء = القيمة الحقيقية ÷ قيمة الجزء.
- صورة النسبة $\frac{3}{4}$ هي نفسها $3 \div 4$ وهي أيضاً $3: 4$
- نتعامل مع النسبة كأنها كسر عادى من حيث الضرب والقسمة والاختصار.



ابن الياسمين

هو أبو محمد عبدالله بن محمد بن الحاج الأدريني من أهل مدينة (فاس) بالمغرب واشتهر بصياغة القواعد الرياضية في صورة قصائد ، فقد كان أديباً و بليغاً و قام الكثير ممن جاءوا بعده بشرح قصائده في الرياضيات من أمثال بن الهائم.

أهم مؤلفاته: الياسمينة في الجبر والمقابلة، الياسمينة في أعمال الجذور، الياسمينة في الكفات.

يمكن تلخيص ما سبق على شكل صيغة رياضية، نفرض لدينا عدد أو كمية p نريد تقسيمها بنسبة $m:n$ فيقال:

$$\text{مجموع الأجزاء} = m + n$$

$$\text{نصيب الجزء الأول} = \left(\frac{m}{m+n}\right)p$$

$$\text{نصيب الجزء الثاني} = \left(\frac{n}{m+n}\right)p$$

ملحوظة (1)
ليس للنسبة وحدة قياس.

مثـــــال (1)

إذا أردنا تقسيم عدد 280 كتاب على مدرستين بنسبة $2:5$ ، فما هو نصيب كل مدرسة من الكتب.

الحل

في هذا المثال لدينا عملية تقسيم بنسبة $2:5$ ولنفرضها هي $m:n$ لعدد من الكتب (p) فبالتالي نحسب مجموع الأجزاء:

$$\text{مجموع الأجزاء} = m + n = 2 + 5 = 7$$

وعند تقسيم الكتب على مدرستين بالنسبة المذكورة يكون لدينا:

$$\text{نصيب المدرسة الأولى} = \left(\frac{m}{m+n}\right)p = \left(\frac{2}{5+2}\right)(280) = 80 \text{ كتاباً}$$

$$\text{نصيب المدرسة الثانية} = \left(\frac{n}{m+n}\right)p = \left(\frac{5}{5+2}\right)(280) = 200 \text{ كتاباً}$$



لاحظ أن مجموع الكتب ثابت وهو 280 كتاباً عبارة عن 80 كتاب للمدرسة الأولى و200 كتاب للمدرسة الثانية.

مثـــــال (2)

أراد رجلاً توزيع مبلغ 15 ألف ريال على أولاده الثلاثة بنسبة $2:3:5$، احسب نصيب كل واحد من الأولاد من المبلغ بالريال.

الحل

نجد في هذا المثال أن نسبة تقسيم المبلغ $2:3:5$ وسنعتبرها $m:n:l$ لمبلغ من المال (p) حيث:

$$p = 15000$$

$$\text{مجموع الأجزاء} = m + n + l = 2 + 3 + 5 = 10$$

ولذلك إذا أراد الرجل أن يوزع هذا المال على الأولاد الثلاثة فنجد أن:

$$\text{نصيب الولد الأول} = \left(\frac{m}{m+n+l}\right)p = \left(\frac{2}{10}\right)(15000) = 3000 \text{ ريالاً}$$

$$\text{نصيب الولد الثاني} = \left(\frac{n}{m+n+l}\right)p = \left(\frac{3}{10}\right)(15000) = 4500 \text{ ريالاً}$$

$$\text{نصيب الولد الثالث} = \left(\frac{l}{m+n+l}\right)p = \left(\frac{5}{10}\right)(15000) = 7500 \text{ ريالاً}$$



وللتأكد من الإجابة نجد أن مجموع أنصبة الأولاد الثلاثة:

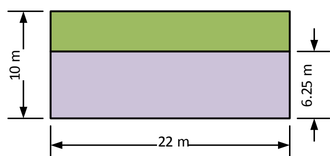
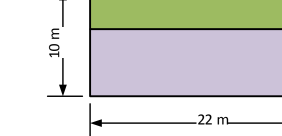
$$= 3000 + 4500 + 7500$$
$$= 15000$$

وهو أصل المبلغ قبل عملية التقسيم.

مثـــال (3)

عرضت إحدى شركات المقاولات قطعة ارض مساحتها 220 متر مربع للبيع، وحددت 1200ريالاً سعر المتر المربع، فلم تجد من يتقدم لشراء الأرض فقررت تقسيم قطعة الأرض ورفع ثمن المتر المربع إلى 1500 ريالاً للمتر المربع لتسهيل بيعها ووجدت أن نسبة 3 :5 ستكون ملائمة لذلك، احسب العائد الإضافي على الشركة من عملية التقسيم.

الحل

سنوجد مساحة كل قطعة على حده ثم نحسب ثمن كل قطعة وذلك على النحو التالي، بفرض أن المساحة الكلية للأرض (p) وهي تساوي 220 متر مربع ونسبة التقسيم هي $m:n$ وهي تساوي $5:3$

$$\text{مجموع الأجزاء} = m+n = 5+3 = 8$$

$$\text{مساحة القطعة الأولى} = \left(\frac{m}{m+n}\right)p = \left(\frac{5}{5+3}\right)(220) = 137.5\ m^2$$

$$\text{مساحة القطعة الثانية} = \left(\frac{n}{m+n}\right)p = \left(\frac{3}{5+3}\right)(220) = 82.5\ m^2$$

الآن سنحسب ثمن قطعتي الأرض

ثمن الارض قبل التقسيم = 220× 1200 = 264000 ريالا

ثمن القطعة الاولى **بعد التقسيم** = مساحة القطعة الاولى X سعر المتر المربع

$= 137.5 \times 1500 = 206250$ ريالاً

ثمن القطعة الثانية **بعد التقسيم** = مساحة القطعة الثانية × سعر المتر المربع

$= 82.5 \times 1500 = 123750$ ريالاً

العائد الصافي للشركة =(206250+123750)- 264000=66000 ريالا

ملحوظة (2)

الوحدة المستخدمة للأطوال يرمز لها بالرمز m دلالة على المتر، والوحدة المستخدمة للمساحات هي m^2 دلالة على المتر المربع.

مثـــال (4)

دخل طالب اختبار مادة الرياضيات للدور الأول فحصل على 10 درجات وفي الدور الثاني حصل على 15 درجة، هل يمكن المقارنة بين درجة الاختبار في الدور الأول ودرجة الاختبار في الدور الثاني؟

الحل



في هذا المثال سنستخدم النسبة بين درجتي الاختبار لمقارنتها على النحو التالي:

$$\text{النسبة} = \frac{\text{درجة الاختبار في الدور الثاني}}{\text{درجة الاختبار في الدور الأول}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

أي أن درجة اختبار الدور الثاني تساوي $\frac{3}{2}$ درجة اختبار الدور الأول وهذه العملية الرياضية هي أحد أشكال المقارنة بين الكميات.

مثـــال (5)

تصدر إحدى دور النشر جريدة يومية توزع منها في الفترة الصباحية 4000 نسخة وتوزع منها في الفترة المسائية 3500 ، احسب نسبة توزيع الفترة الصباحية إلى الفترة المسائية.

الحل



$$\text{النسبة المطلوبة} = \frac{\text{عدد نسخ الفترة الصباحية}}{\text{عدد نسخ الفترة المسائية}} = \frac{4000}{3500} = \frac{40}{35} = \frac{8}{7}$$

أي أن عدد نسخ الفترة الصباحية يساوي $\frac{8}{7}$ عدد نسخ الفترة المسائية.

مثـــــال (6)

إذا كانت النسبة بين عُمري أحمد إلى أخيه علي كنسبة $1 :3$، فما هو عُمر علي إذا كان عُمر أحمد هو 3 سنوات؟

الحل



النسبة بين عُمري الأخين هي $3:1$ أي أن:

$$\text{النسبة} = \frac{\text{عُمر أحمد}}{\text{عُمر علي}} = \frac{1}{3}$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة عن عُمر أحمد نجد أن:

$$\text{النسبة} = \frac{3}{\text{عُمر علي}} = \frac{1}{3}$$

وبما أن حاصل ضرب طرفي المعادلة يساوي حاصل ضرب وسطي المعادلة، نجد أن:

$$(\text{عُمر علي})(1) = (3)(3) = 9$$

أي أن عمر علي هو 9 أعوام.

مثـــــال (7)

أي النسبتين التاليتين أكبر:

$$3:5, \qquad 7:12$$

الحل



للمقارنة بين نسبتين نحول كلاً منهما إلى صورة كسر ثم نقارن بينهما، ولذلك:

$$3:5 \Rightarrow \frac{3}{5}, \qquad 7:12 \Rightarrow \frac{7}{12}$$

والآن نجري عملية المقارنة على النحو التالي:

$$\frac{3}{5} \boxed{??} \frac{7}{12}$$

$$\frac{3}{5} \times 1 \boxed{??} \frac{7}{12} \times 1$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{12}{12} \boxed{??} \frac{7}{12} \times \frac{5}{5}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\frac{36}{60} > \frac{35}{60}$$

ولذلك نقول أن النسبة $3:5$ أكبر من النسبة $7:12$

(2) النسبة المئوية
(Percentage)



يتردد كثيراً ذكر النسبة المئوية في كثير من المجالات ومنها النسبة المئوية للنجاح 93% أي من بين كل 100 طالب نجح 93 طالباً، والنسبة بصورة عامة كسر بسطه الواقع ومقامه العدد الكلي كأن نقول تقدم لامتحان الرياضيات 100 طالب نجح منهم 72 طالب فنقول أن نسبة النجاح في هذا الامتحان هي 72% وتقرأ 72 بالمئة، وعليه النسبة المئوية علاقة بين كميتين من نوع واحد مقامها العدد 100 ويكون 50% هي في الأصل أحدى الثلاث الآتية:

$$\frac{1}{2} \text{ أو } 0.5 \text{ أو } \frac{50}{100} \text{ أو } 50:100$$

ولا يعطى اللفظ بالمئة إلا لنسبة مقامها 100، والرمز % إشارة للنسبة المئوية، والقول 25% لا يعني وجود 25 حالة من بين 100 حالة بل قد يكون 50 من بين 200 أو 12.5 من بين 50 فالنسبة لا تتغير قيمتها بضرب حديها (البسط والمقام 25، 100 مثلاً) في عدد صحيح أو كسر(2، 0.5 مثلاً).



تستخدم النسبة المئوية كثيراً في المعاملات التجارية كقول التاجر لدي تخفيض على المبيعات 15% أي من يشتري من متجرنا نعطيه خصم قدره 15%، فإذا أردنا شراء سلعة من هذا المتجر قيمتها المذكورة (المطبوعة) عليها 400 ريال فسنعطي التاجر مبلغ أقل من تلك القيمة:

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{الخصم}}{Discount}\right) = \frac{15}{100} \times 400 = 60 \text{ ريال}$$

ولذلك سنقوم بدفع مبلغ:

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{المبلغ المدفوع}}{Price\ after\ sale}\right) = 400 - 60 = 340 \text{ ريال}$$

وسنعطي مجموعة من الأمثلة لتوضيح مفهوم النسبة المئوية بمزيد من التفصيل.

مثـــال (8)

حول كلاً من الكسرين $0.3 , \frac{5}{7}$ إلى نسبة مئوية.

الحل

يمكن تحويل أي عدد كسري أو عشري إلى نسبة مئوية وذلك بضرب العدد في 100 مع وضع علامة % بعد الناتج مباشرة حيث تعني هذه العلامة (%) القسمة على 100 ولذلك فلتحويل الكسر ين إلى نسبة مئوية نقوم بعمل الآتي:

$$\frac{5}{7} \times 100 = \frac{500}{7}\% \cong 71.43\%, \qquad 0.3 \times 100\% = 30\%$$

مثـــال (9)

احسب 20% من 500 ريال.

الحل

في هذا المثال سنقوم بعملية عكسية بحيث نضع 20% على صورة كسر $\frac{20}{100}$ وتعني كلمة "من" عملية ضرب أي أن 20% من 500 تعني رياضياً:

$$\frac{20}{100} \times 500 = 100 \text{ ريال}$$



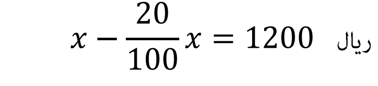
مثـــــال (10)

أراد عبد الرحمن شراء هاتف محمول فذهب إلى أحد المتاجر التي تعطي خصماً 20% على جميع أنواع الهواتف التي تبيعها، فإذا دفع عبد الرحمن مبلغ 1200 ريال نظير شراء الهاتف، فما هو ثمن الهاتف قبل الخصم؟

الحل

بفرض أن ثمن الهاتف قبل الخصم x ومعطى لدينا نسبة الخصم التي يوفرها المتجر وأيضاً المبلغ المدفوع بعد الخصم، من تلك المعلومات نستطيع القول بأن:





$$x - \frac{20}{100}x = 1200 \quad \text{ريال}$$

أي أن ثمن الهاتف قبل الخصم مطروحاً منه نسبة الخصم يعطينا المبلغ الذي دفعه عبد الرحمن، ومن ذلك ينتج أن:

$$\left(\frac{80}{100}\right)x = 1200 \quad \Rightarrow x = 1200 \times \left(\frac{100}{80}\right) = 1500 \quad \text{ريال}$$

أي أن ثمن الهاتف قبل الخصم هو 1500 ريال.

مثـــــال (11)

تأخر مواطن عن دفع فاتورة الكهرباء التي قيمتها 500 ريال فزادت قيمتها بنسبة 10% نظير التأخير، احسب القيمة التي سيدفعها المواطن بعد الزيادة.

الحل

أولاً نحسب الزيادة ثم نجمع هذه الزيادة على مبلغ الفاتورة الأصلي لنحصل على القيمة الكلية التي سيدفعها المواطن وذلك على النحو التالي:



$$\left(\begin{matrix}\text{الغرامة}\\ Penalty\end{matrix}\right) = \left(\frac{10}{100}\right) \times (500) = 50 \quad \text{ريال}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{القيمة الاجمالية}\\ Total\end{matrix}\right) = 50 + 500 = 550 \quad \text{ريال}$$

مثـــــال (12)

في رحلة سياحية إلى إحدى المدن الساحلية دفع المسئول عن الرحلة مبلغ 3300 ريال نظير 10 تذكرة طيران، فما هو أكبر عدد من التذاكر يستطيع المسئول شراؤه نظير مبلغ 12000 ريال؟

الحل

عدد التذاكر مقسوماً على إجمالي ثمن التذاكر عبارة عن نسبة ثابتة ولذلك نفرض أن عدد التذاكر المطلوبة هو y وبالتالي فإن:



$$\frac{10}{3300} = \frac{y}{12000}$$

ومن هذه العلاقة ينتج أن عدد التذاكر المطلوب y:

$$y = \frac{10 \times 12000}{3300} = 36.36 \quad \text{تذكرة}$$

وبالتالي فإن المسئول عن الرحلة لا يستطيع شراء أكثر من 36 تذكرة نظير مبلغ 12000 ريال.

(3) المعدل
(Rate)

المعدل هو المقارنة بين مقدارين من نوعين مختلفين، أي بين وحدات الطول ووحدات الزمن أو بين وحدات المساحة ووحدات الحجوم وهكذا.



نستخدم يومياً الكثير من الجمل الرياضية، مثل: كانت سرعة السيارة 70 كم/ساعة أو بلغ معدل إنتاج العامل 12 قميص/اليوم أو طبعت السكرتيرة الكتاب بمعدل 65 كلمة في الدقيقة أو أدرُس يومياً بمعدل 6 ساعات أو تبلغ كثافة الزئبق 13.6 جم/سم3 ... وهكذا، ويمكن صياغة الجمل السابقة رياضياً على النحو التالي:

$$\frac{13.6 \text{ جم}}{\text{سم}^3}, \quad \frac{65 \text{ كلمة}}{\text{دقيقة}}, \quad \frac{12 \text{ قميص}}{\text{يوم}}, \quad \frac{70 \text{ كم}}{\text{ساعة}}$$

ونقول أن الكثافة السكانية في بلد ما هي 500 نسمة / كم2 فماذا نلاحظ من كل ذلك؟ ذكرنا عند تعريف النسبة أنها مقارنة بين كميتين من نفس النوع بمعنى مقارنة عدد بآخر أو كمية بأخرى. ومما سبق يتضح مفهوم المعدل واختلافه عن مفهوم النسبة وبالتالي عند المقارنة بين نوعين مختلفين في الوحدة تسمى هذه النسبة بالمعدل.

مثـــــال (13)

قطعت سيارة مسافة 310 كم خلال 5 ساعات، فما هو معدل سرعة هذه السيارة.

الحل



لحساب معدل سرعة السيارة نقسم المسافة التي قطعتها السيارة على الزمن الذي قضته لقطع تلك المسافة:

$$\binom{\text{معدل سرعة السيارة}}{Velocity} = \frac{310}{5} = 62\,\frac{km}{hour}$$

مثـــــال (14)

إذا كانت عدد ضربات قلب شخص طبيعي 4860 ضربة في الساعة، احسب معدل ضربات القلب في الدقيقة لهذا الشخص علما بأن المعدل الطبيعي لضربات القلب هو $80 - 70$ ضربة في الدقيقة، هل هذا طبيعي أم لا؟

الحل



من المعلوم أن الساعة $= 60$ دقيقة وبالتالي فإنه يمكن حساب معدل ضربات القلب في الدقيقة على النحو التالي:

$$\frac{4860}{60} = 81 \text{ ضربة } / \text{ دقيقة}$$

وبالتالي فإن ذلك الشخص يحتاج العرض على طبيب لمعرفة سبب ارتفاع ضرباته.

(4) التناسب
(Proportion)

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر، فإذا كان لدينا a, b, c, d نقول أنها متناسبة إذا كان:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$



وللتعرف على المعنى الرياضي للتناسب نفرض أن ثمن علبة بسكويت الشاي هو 2 ريال بأحد المتاجر، فكم يكون ثمن شراء علبتين، ثلاث علب، أربع علب، ...؟ وبالنظر إلى الجدول التالي والذي يوضح عدد العلب وعدد الريالات المدفوعة في كل حالة.

عدد علب البسكويت	1	2	3	4	5	...
الثمن بالريالات	2	4	6	8	10	...

($\times 2$ ، $\div 2$)

يتضح من الجدول أن:

أولاً: عدد الريالات في كل حالة ينتج من ضرب عدد علب البسكويت المناظر له $\times 2$

ففي الحالة الأولى عدد العلب 1 فيكون عدد الريالات $1 \times 2 = 2$ وفي الحالة الثانية $2 \times 2 = 4$ وفي الحالة الثالثة $3 \times 2 = 6$ وهكذا.... وبالتالي يمكن كتابة نسبة عدد الريالات إلى عدد علب البسكويت في كل حالة كما يلي:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \cdots = 2 \quad (\text{مقدار ثابت})$$

ونستنتج من ذلك أن النسب متساوية ويطلق على هذه الصورة الرياضية مسمى التناسب.

ثانياً: عدد علب البسكويت في كل حالة ينتج من قسمة عدد الريالات المناظرة له على 2 أو ضربه في $\frac{1}{2}$، ويمكن كتابة نسب عدد علب البسكويت إلى عدد الريالات في كل حالة كما يلي:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \cdots = \frac{1}{2} \quad (\text{مقدار ثابت})$$

نستنتج من ذلك أن النسب متساوية وتلك الصورة الرياضية أيضاً يطلق عليها التناسب، ومن الحالتين أولاً وثانياً نجد أن التناسب ما هو إلا تساوي نسبتين أو أكثر وهو التعريف المذكور سابقاً.

ملحوظة (3)
من تعريف التناسب، إذا كان لدينا:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

وكان معلوم لدينا ثلاثة من تلك الكميات يمكن إيجاد الكمية الرابعة، ولنفرض أن المعلوم لدينا كل من a, b, c فيكون حاصل ضرب الطرفين مساوياً لحاصل ضرب الوسطين ومنه ينتج أن:

$$ad = cb$$

أي أن الكمية المجهولة تساوي:

$$d = \frac{cb}{a}$$

مثـــال (15)

بين ما إذا كانت أي من مجموعات الأرقام التالية متناسبة وأيها غير متناسبة:

$$5,15,6,18, \qquad 3,6,7,10$$

الحل

في المجموعة الأولى: من تعريف التناسب نوجد النسبة بين الرقم الأول والثاني ثم نوجد النسبة بين الرقم الثالث والرابع ثم نقارن النسبتين هل هما متساويتين أم لا ولعمل ذلك نجد أن:

$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \cdots = \frac{1}{3} (\text{مقدار ثابت})$$

ويتضح لنا من تلك النتيجة تساوي النسبتين، أي أن مجموعة الأرقام الأولى متناسبة. أما المجموعة الثانية فنلاحظ أنها غير متناسبة وذلك لأن:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq \frac{7}{10}$$

مثـــال (16)

إذا كانت $\frac{x}{y}=\frac{3}{8}$ أوجد قيمة y بدلالة x وإذا كانت $x=9$ فما هي قيمة y.

الحل

لدينا هنا نسبتين متساويتين:

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{8}$$

ومن القاعدة التي تقول أن حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين، نجد أنه يمكن الحصول على y بدلالة x أي أن:

$$8x=3y \Rightarrow y=\left(\frac{8}{3}\right)x$$

وبالتعويض عن قيمة x في العلاقة السابقة ينتج أن:

$$y=\left(\frac{8}{3}\right)(9)=24$$

مثـــال (17)

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

$$(1)\quad \frac{4}{x}=\frac{5}{7},\qquad (2)\quad \frac{x}{4}=\frac{8}{3},\qquad (3)\quad \frac{7}{5}=\frac{x}{3}$$

الحل

كما ذكرنا سابقاً يمكن الحصول على قيمة x بشكل مباشر عن طريق تطبيق قاعدة حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين ومنه نستنتج أن:

$$(1)\quad \frac{4}{x}=\frac{5}{7}\Rightarrow x=\frac{4\times 7}{5}=\frac{28}{5}=5.6$$

$$(2)\quad \frac{x}{4}=\frac{8}{3}\Rightarrow x=\frac{4\times 8}{3}=\frac{32}{3}=10.6$$

$$(3)\quad \frac{7}{5}=\frac{x}{3}\Rightarrow x=\frac{7\times 3}{5}=\frac{21}{5}=4.2$$

مثـــال (18)

إذا كانت كل مجموعة من الأعداد التالية متناسبة، فأوجد قيمة x في كل حالة:

$$(1)\quad 4,8,1,x,\qquad (2)\quad 10,x,5,4$$

الحل

حيث أن كل من مجموعات الأعداد متناسبة نجد أن:

$$(1)\quad \frac{4}{8}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{8\times 1}{4}=2$$

$$(2)\quad \frac{10}{x}=\frac{5}{4}\Rightarrow x=\frac{4\times 10}{5}=8$$

مثـــال (19)

دفع رجل مبلغ 2400 ريال نظير شراء ثلاث سلع مختلفة، فإذا كانت النسبة بين أثمان السلع هي $1:2:3$ فما هو ثمن كل سلعة على حده.

الحل

في هذا المثال لدينا الثمن الكلي للسلع الثلاث 2400 سنفرضه p ولنفرض أن النسبة بين أثمان السلع هي:

$$m:n:l = 1:2:3$$

وبالتالي كما شرحنا سابقا في أول الفصل نجد أن:

$$\left(\text{ثمن السلعة الأولى}\right) = \left(\frac{m}{m+n+l}\right)p = \left(\frac{1}{6}\right)(2400) = 400 \text{ ريالاً}$$

$$\left(\text{ثمن السلعة الثانية}\right) = \left(\frac{n}{m+n+l}\right)p = \left(\frac{2}{6}\right)(2400) = 800 \text{ ريالاً}$$

$$\left(\text{ثمن السلعة الثالثة}\right) = \left(\frac{l}{m+n+l}\right)p = \left(\frac{3}{6}\right)(2400) = 1200 \text{ ريالاً}$$

للتحقق من الاجابة نجد أن إجمالي ثمن السلع يساوي الثمن المدفوع

$$400 + 800 + 1200 = 2400 \text{ ريالاً}$$

مثــــال (20)

أسرة مكونة من ثلاثة أفراد (أب – أم – ابن) فإذا كانت النسبة بين طول الأب: طول الأم: طول الابن هي $6:8:9$ على الترتيب، فإذا علمت أن طول الابن 1.2 متر، احسب طول كلاً من الأب والأم.

الحل

نفرض أن مجموع أطوال كل من الأب والأم والأبن p وأن النسبة بين هذه الأطوال هي:

$$m:n:l = 9:8:6$$

ولذلك فإن طول الابن:

$$\left(\text{طول الابن}\right) = \left(\frac{l}{m+n+l}\right)p = 1.2\ m$$

أي أن:

$$1.2 = \left(\frac{6}{6+8+9}\right)(p) \Rightarrow p = \frac{1.2 \times 23}{6} = 4.6\ m$$



ومن ذلك نستطيع الحصول على طول كلاً الأب والأم، وذلك على النحو التالي:

$$\left(\text{طول الأب}\right) = \left(\frac{m}{m+n+l}\right)p = \left(\frac{9}{23}\right)(4.6) = 1.8\ m$$

$$\left(\text{طول الأم}\right) = \left(\frac{n}{m+n+l}\right)p = \left(\frac{8}{23}\right)(4.6) = 1.6\ m$$

مثــــال (21)

استغرق عبد الرحمن 44 دقيقة في كتابة عدد 11 ورقة مستخدماً برنامج معالجة الكلمات الشهير "وورد" "Microsoft word" على الحاسب الآلي (الكمبيوتر)، احسب الوقت الذي سوف يستغرقه عبد الرحمن لكتابة 100 ورقة.

الحل

لحل هذا المثال نحسب أولاً معدل الكتابة لعبد الرحمن:

$$\binom{\text{معدل الكتابة}}{Rate} = \frac{11}{44} = 0.25\ \ Paper/min$$



إذن الوقت المستغرق لكتابة 100 ورقة هو:

$$Time = 100 \,/\, 0.25 = 400 \;\; min$$

ويمكن تحويل الدقائق إلى ساعات وذلك بالقسمة على 60 أي أن الوقت الذي سيستغرقه عبد الرحمن لكتابة 100 ورقة هو:

$$Time = \frac{400}{60} = 6.66 \quad \text{ساعة}$$

مثـــال (22)

مثلث ABC فيه

$$AB:BC:CA = 3:5:7$$

فإذا كان الفرق بين طولي $\overline{BC}, \overline{AB}$ هو 4 سم، فأوجد أطوال أضلاع المثلث ثم أوجد محيطه.

الحل

النسبة بين أطوال الأضلاع الثلاثة هي $3:5:7$ وهذا يعني أن $\overline{AB}$ قسمت إلى ثلاثة أجزاء متساوية، $\overline{BC}$ قسمت إلى خمسة أجزاء متساوية، $\overline{CA}$ قسمت إلى سبعة أجزاء متساوية من نفس النوع، الفرق بين طول كلاً من:

$$\overline{BC} - \overline{AB} = 5 - 3 = 2 \;\; \text{جزء}$$

وهذا يعني أن 2 جزء تعادل 4 سم أي أن قيم الجزء تساوي $\frac{4}{2}$ وتساوي 2 سم، ويكون لدينا:

$$\overline{AB} = 2 \times 3 = 6 \; cm$$

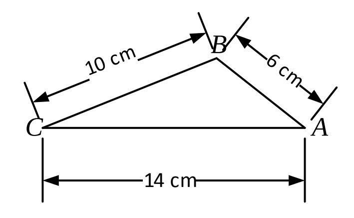
$$\overline{BC} = 2 \times 5 = 10 \; cm$$

$$\overline{CA} = 2 \times 7 = 14 \; cm$$

وحيث أن:

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$$\therefore \; \text{المحيط} = 6 + 10 + 14 = 30cm$$



للتحقق من الإجابة:

$$6:10:14 = 3:5:7$$

وهي النسبة المعطاة في بداية المثال.

(5) المعاملات التجارية والإدارية

(Commercial and administrative transactions)



كما ذكرنا في مقدمة الفصل أنه لا غنى عن الرياضيات في مختلف المجالات الحياتية، نجد أن المعاملات التجارية والإدارية من أهم المجالات المستخدمة، فإن أي تاجر أو موظف أو حتى شخص عادي يريد أن يعرف مقدار خسارته أو ربحه في السلعة التي يتعامل بها أو مرتبه الذي يتقاضاه، أو أن موظف ما يريد حساب نسبة زيادة أو نقص مرتبه الشهري، وذلك حتى يتثنى للشخص تقييم عمله أو تقييم منشأته التجارية من حيث الربح والخسارة إلخ...

(أ) **حساب الربح:** (يحدث الربح عند بيع السلعة بثمن أعلى من ثمن شراءها)

$$\text{مقدار الربح} = \text{ثمن البيع} - \text{ثمن الشراء}$$

(ب) **حساب النسبة المئوية للربح:** (هي مقدار الربح مقسوماً على ثمن الشراء ثم نضرب الناتج في 100).

$$\text{النسبة المئوية للربح} = \frac{\text{مقدار الربح}}{\text{ثمن الشراء}}\%$$

(ج) **حساب الخسارة:** (تحدث الخسارة عند بيع سلعة ما بسعر أقل من ثمن الشراء)

$$\text{مقدار الخسارة} = \text{ثمن الشراء} - \text{ثمن البيع}$$

(د) **حساب النسبة المئوية للخسارة:** (هي مقدار الخسارة مقسوماً على ثمن الشراء ثم نضرب الناتج في 100)

$$\text{النسبة المئوية للخسارة} = \frac{\text{مقدار الخسارة}}{\text{ثمن الشراء}}\%$$

(هـ) **حساب الزيادة أو النقص في الراتب:** (يتم ضرب نسبة الزيادة أو النقص في الراتب الأساسي)

$$\text{مقدار الزيادة أو النقص في الراتب} = \text{نسبة الزيادة أو النقص} \times \text{الراتب}$$

والأمثلة التالية ستوضح لنا كيفية استخدام هذه العلاقات.

مثـــال (23)

اشترى تاجر سلعة غذائية وباعها بمكسب 10%، فإذا كان صافي الربح 20,000 ريال فاحسب الذي اشترى به التاجر هذه السلعة.

الحل

ذكرنا المعادلة التي نحسب على أساسها نسبة الربح ولذلك نجد أن:

$$\text{النسبة المئوية للربح} = \frac{\text{مقدار الربح}}{\text{ثمن الشراء}}\%$$

وبالتعويض في تلك العلاقة بالمعلومات المعطاة في المثال نجد أن:

$$10\% = \frac{\text{صافي الربح}}{\text{ثمن الشراء}} \Rightarrow \frac{10}{100} = \frac{20000}{\text{ثمن الشراء}}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$\text{ثمن الشراء} = 10 \times 20000 = 200000 \text{ ريال}$$

مثـــــال (24)

يتقاضى موظف بشركة ما راتباً شهرياً $4,000$ ريال، وقرر مدير هذه الشركة منح جميع الموظفين زيادة بنسبة 15% من الراتب، احسب راتب هذا الموظف بعد تطبيق الزيادة.

الحل

مقدار الزيادة أو النقص في الراتب = نسبة الزيادة أو النقص × الراتب

بالتعويض في هذه العلاقة بالمعلومات المعطاة، نجد أن:

$$\text{مقدار الزيادة في الراتب} = \frac{15}{100} \times 4,000 = 600 \text{ ريال}$$

وبالتالي يصبح:

$$\text{راتب الموظف بعد الزيادة} = 4,000 + 600 = 4,600 \text{ ريال}$$



(6) الفرائض (الزكاة)
(Zakat)



(أ) زكاة المال:

تعتبر الزكاة من أهم العبادات المالية في الإسلام فهي الركن الثالث من أركانه، وأمرنا الله عز وجل بوجوب تأديتها ضمن وقت ونظام معين لا يجب أن نحيد عنه أو أن نبتدع فيه ومن شروطها أنها لا تجب إلا على المسلم وأن تبلغ نصاباً محدداً.

والنصاب وهو الحد الأدنى من المال الذي إن أمتلكه المسلم يجب أن يقوم بإخراج الزكاة عنه، ويختلف النصاب بحسب قيمة الذهب أو الفضة ويتم تحديد قيمة النصاب من قبل الهيئات الشرعية داخل البلد وقيمة النصاب تعادل 85 جرام من الذهب الخالص أو 595 جرام من فضة أو ما يعادلها من الأموال النقدية، كما ينبغي للقيام بإخراج زكاة المال أن يمر على المال الذي تجاوز النصاب عاماً واحداً.

هناك أنواع عديدة من الزكاة منها زكاة المال والذهب والفضة وزكاة النعم (الأنعام) وزكاة الزروع، وفي دراستنا لن نتطرق سوى لزكاة المال، وإخراج زكاة المال يكون في الأموال النقدية والذهب والفضة حتى ولو تم ادخار هذه الأموال من أجل شراء منزل أو سيارة أو ما شابه فإن الزكاة واجبة في حكمه، أما الأشياء التي يمتلكها الشخص كالبيت أو السيارة فلا تجب الزكاة فيه.

كيفية حساب زكاة الأموال:

لنفترض أن شخصاً يمتلك $20,000$ ريالاً وبطبيعة الحال فهذه القيمة أعلى من قيمة النصاب، فكل ما عليه عند تجاوز هذا المبلغ مدة عام أن يقوم بقسمته على 40 فيكون الناتج $\frac{20,000}{40}$ أي ما يساوي 500 ريال، وبنفس الكيفية لو أن شخصاً يمتلك كمية معينة من الذهب لنفترض 500 جرام من الذهب الخالص فإن عليه معرفة قيمة جرام الذهب في الوقت الذي يريد إخراج الزكاة فيه فلو افترضنا أن جرام الذهب الخالص كان في حينه 150 ريال فيكون الحساب كالتالي:

$$\frac{500 \times 150}{40} = 1875 \text{ ريال}$$

وهي قيمة الزكاة التي يجب عليه إخراجها.

أيضاً يمكن حساب زكاة المال عن طريق النسبة المئوية المفروضة وهي 2.5%، فأي مبلغ تجاوز النصاب يجب إخراج ما قيمته 2.5% من هذا المبلغ فمثل المبلغ السابق لو أردنا حسابه بهذه الصورة يكون:

$$20,000 \times \frac{2.5}{100} = 500 \text{ ريال}$$

ونجد أن الطريقتين تعطي نفس النتيجة فبإمكانك استخدام أي واحدة منها لحساب زكاة المال. وسنوضح ذلك في المثالين التاليين.

مثـــــال (25)

يمتلك رجلاً مبلغاً المال قدره 15,000 ريال وقد سار عليـــــه حول كامل فهل يجب على هذا الرجل إخراج زكاة مال عن هذا المبلغ علماً بأن سعر جرام الذهب عند وقت الإخراج هو 150 ريال.

الحل

من معطيات المثال بلوغ حول كامل، ولذلك تحقق أحد شروط الزكاة، ولذلك نتأكد من الشرط الثاني، هل هذا المبلغ عليه زكاة أم لا:

$$\text{قيمة النصاب} = 85 \times 150 = 12,750 \text{ ريال}$$

والمبلغ الذي يملكه الرجل أكبر من النصاب وحال عليه حول كامل ولذلك تجب عليه زكاة مال قدرها:

$$\text{قيمة الزكاة} = 15,000 \times \frac{2.5}{100} = 375 \text{ ريالاً.}$$

مثـــــال (26)

إذا كانت زكاة المال المستحق على رجل مقدارها 1500 ريال، احسب المبلغ الأصلي.

الحل

ذكرنا أن العلاقة المستخدمة لحساب زكاة المال هي:

$$\text{قيمة الزكاة} = (\text{المبلغ الأصلي}) \times \frac{2.5}{100}$$

$$\text{المبلغ الأصلي} = \text{قيمة الزكاة} \times \frac{100}{2.5}$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\text{المبلغ الأصلي} = 1500 \times \frac{100}{2.5} = 60,000 \text{ ريال}$$

مثـــــال (27)

تمتلك سيدة حلياً وزنه 75 جراماً من الذهب إضافة إلى ذلك لديها مبلغ 10,000 ريال وقد مر على تلك الأموال حولاً كاملاً، هل يجب على هذه السيدة إخراج زكاة مال، احسبها إن وجدت علماً بأن سعر جرام الذهب هو 150 وقت الإخراج.

هذا المثال مركب نوعاً ما، فإن عدد جرامات الذهب لا يجب عليها زكاة لأنها لم تبلغ النصاب الشرعي، ومبلغ المال لا تجب عليه زكاة مال لأنه أقل من النصاب الشرعي، ولكن يمكن أن يكون الذهب والمال معاً عليهما زكاة، ولذلك يجب أن نحسب قيمة الذهب بالإضافة إلى المال:

$$\text{ما تمتلكه السيدة} = 10,000 + 75 \times 150 = 21,250 \text{ ريالاً}$$

وهذا المبلغ أكبر من النصاب (راجع مثال 25) ولذلك وجب على هذه السيدة إخراج زكاة مال قدرها:

$$21250 \times \frac{2.5}{100} = 531.25 \text{ ريال}$$

(6) الفرائض (الميراث)

(ب) **الميراث**

الميراث في اللغة هو ما يورِّثه الشخص أو الجماعة لمن بعدهم، واصطلاحاً هو كل ما يتركه الميت من بعده لورثته من حقوق وأموال. ولعلَّ أفضل أنظمة المواريث في الدنيا هو النظام الإسلامي، حيث لم يجعل ديننا الحنيف للمورِّث سلطة على أمواله وأملاكه وحقوقه من بعد موته إلا بالثُّلث فقط، وهو مرهون بوصية، على عكس القوانين الوضعية التي تتيح للشخص أن يترك أمواله وممتلكاته وحقوقه لمن يشاء من بعده؛ ويحرم منها من يشاء.

عند تقسيم الميراث، أول ما يُبدأ به هو إخراج الحقوق من التركة، مثل الزكاة إن لم يكن قد أخرجها المتوفي قبل وفاته، تسديد الدون أو الأقساط أو دفع رهن كان عليه، ومن الحقوق الواجب إخراجها قبل القيام بعملية تقسيم التركة هو دفع مؤخر الصداق للزوجة أو الزوجات، فهي من الحقوق الواجب تأديتها قبل تقسيم التركة؛ حيث أنها تعتبر دَيْناً على الرجل واجب الاستيفاء فوراً. وبعد اداء كافة المستحقات وتسديد كافة الديون؛ يتم حصر الورثة وتحديد هويتهم ومقدار توريثهم، وفي هذا الأمر قام العلماء بتقسيم الورثة إلى فئات كالتالي:

- أصحاب الفروض، وهم الذين يرثون فرضاً إن وجِدوا، وهم يأخذون حصتهم من التركة حسب النصيب المحدَّد لكل منهم، وهم مقدمون على سواهم من الورثة. وهم الأب والأم والزوج والزوجة، والجدة سواء لأمه أو أبيه، الأم والأخ لأمه والأخت لأمه.
- قسم يرث بالتعصيب فقط، وهؤلاء يرثون بلا تقدير، فتكون لهم نِسبٌ محددة يأخذون باقي التركة بعد توزيع حصص أصحاب الفروض. وهم الابن وابن الابن مهما نزل، وابن الأخ سواء الشقيق أو لأبيه، وابن العم سواء الشقيق أو لأبيه وابن العم أيضاً سواء الشقيق أو لأبيه.
- قسم يرث مرة بالفرض فيكون من أصحاب الفروض؛ ومرة بالتعصيب ويجوز الجمع بينهما، وهم حصراً الأب والجد.
- قسم يرث مرة بالفرض ومرة بالتعصيب، ولا يجوز أن يتم الجمع بينهما، وهذه الفئة محصورة للنساء وهن أربع فئات، البنت وبنت الابن والأخت الشقيقة والأخت لأب مهما كثروا.

ويتم توزيع التركة على الورثة حسب الترتيب أعلاه، فيأخذ أصحاب الفروض أولاً، ثم يتم التوزيع على التعصيب وهكذا. وقد حدد الدين الإسلامي الحنيف النِّسَب التي يتم فيها توزيع الميراث على كل شخص، فالأم لها السدس والزوجة لها الثُّمن إن كان له أبناء؛ والربع إن لم يكن له ولد، وإن كانوا أكثر من زوجة فيشتركون بالنسبة وتوزَّع عليهم بالتساوي، الرجل له نصف تركة زوجته إن لم يكن لها ولد، أما إن كان لها ولد فله الربع، والأب يأخذ السدس، وهكذا حسب النِّسب المحددة شرعاً. وبعد اداء الفروض، يأخذ أصحاب التعصيب حصصهم، للذكر مثل حظ الأنثيين.

ويجب أن نوضح في هذا المقام على وجود قيام شخص مختص بتوزيع التركات على حساب الحصص والنِّسَب لكلٍّ من الورثة؛ وعدم ترك الأمر للأهواء الشخصية أو الاجتهادات الفردية، فقد يُخطئ غير العالم في احتساب الحصص أو تحديد من يجوز لهم الورثة من التركة؛ سواء بقصد أو بدون قصد، فيدخل في الظلم الذي لا تفضي عاقبته إلا إلى الندم.

في حالة وجود أولاد ذكور وإناث فإنه يمكن حساب نصيب البنت من العلاقة:

$$\text{نصيب البنت} = \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات} + 2(\text{عدد الأبناء})}$$

من خلال التوجيه القرآني الكريم واجتهاد العلماء تم وضع نماذج للمواريث نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر:

النموذج الأول:

مات رجل وترك زوجة وأم وأب وأولاد (على الأقل ولد واحد)

الوارث	النصيب
الزوجة	$\frac{1}{8}$
الأم	$\frac{1}{6}$
الأب	$\frac{1}{6}$
الأولاد	باقي التركة بشرط أن يرث الذكر مثل حظ الأنثيين (للولد ضعف نصيب البنت)

تذكر أن:

- كلمة أولاد تعني الأبناء والبنات
- إن وجد أكثر من زوجة فهن شركاء في النصيب المفروض

هناك مسائل كثيرة لم يتم التطرق إليها لأن هذا ليس مجال دراستنا.

النموذج الثاني:

مات رجل وترك زوجة وأولاد (على الأقل ولد واحد).

الوارث	النصيب
الزوجة	$\frac{1}{8}$
الأولاد	باقي التركة بشرط أن يرث الذكر مثل حظ الأنثيين (للولد ضعف نصيب البنت)

النموذج الثالث:

ماتت امرأة وتركت زوج وأم وأب وأولاد (على الأقل ولد واحد)

الوارث	النصيب
الزوج	$\frac{1}{4}$
الأم	$\frac{1}{6}$
الأب	$\frac{1}{6}$
الأولاد	باقي التركة بشرط أن يرث الذكر مثل حظ الأنثيين (للولد ضعف نصيب البنت)

مثـــــال (28)

تُوفي رجل وترك ميراثاً قدره 64000 ريال وذلك بعد إخراج الحقوق من التركة، ترك هذا الرجل زوجة واحدة وولدين وثلاثة بنات، احسب نصيب كل فرد.

الحل

عند قراءة هذا المثال نجد أنه يمكن حله باستخدام النموذج الثاني، وذلك على النحو التالي:

$$\text{نصيب الزوجة} = \left(\frac{1}{8}\right) \times 64,000 = 8,000$$ ريال.

والآن نحسب ما تبقى لنا من التركة:

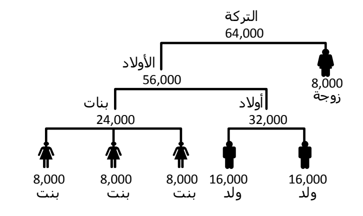
$$\text{باقي التركة} = 64,000 - 8,000 = 56,000$$ ريال

ما تبقى من التركة يوزع على الأولاد (للذكر مثل حظ الأنثيين)، ولذلك:

$$\text{نصيب البنت} = \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات} + 2\left(\text{عدد الأبناء}\right)} = \frac{56,000}{3+2(2)} = \frac{56,000}{7} = 8,000$$ ريال

وأخيراً يمكن حساب نصيب الولد (الابن)

$$\text{نصيب الولد} = 2 \times \text{نصيب البنت} = 2 \times 8,000 = 16,000$$ ريال.



للتحقق من الإجابة نجد أن مجموع الأنصبة:

$$\underbrace{(2)(16,000)}_{\text{الأولاد}} + \underbrace{(3)(8000)}_{\text{البنات}} + \underbrace{8000}_{\text{الزوجة}} = 64,000$$

مثـــــال (29)

تُوفي رجل وترك ميراثاً قدره 80,000 ريال وعند حصر من له حق الإرث وجد عدد أربع زوجات وأم وأب وابن وبنتين. احسب نصيب كل منهم في تركة ذلك الرجل.

عند قراءة هذا المثال نجد أنه يمكن حله باستخدام النموذج الأول، وذلك على النحو التالي:

$$\text{نصيب الأربع زوجات} = \left(\frac{1}{8}\right) \times 80,000 = 10,000$$ ريال.

وبالتالي فإن نصيب كل زوجة من الزوجات الأربع هو عبارة عن:

$$\text{نصيب الزوجة} = \left(\frac{1}{4}\right) \times 10,000 = 2,500$$ ريال.

والآن سنحسب نصيب الأم:

$$\text{نصيب الأم} = \left(\frac{1}{6}\right) \times 80,000 = 13,333.3$$ ريال.

ونصيب الأب يساوي نصيب الأم ويكون:

$$\text{نصيب الأب} = \left(\frac{1}{6}\right) \times 80,000 = 13,333.3$$ ريال.

إجمالي نصيب الزوجات والأم والأب:

$$= 10,0000 + 13,333.3 + 13,333.3 = 36,666.6$$

والآن نحسب ما تبقى لنا من التركة:

$$\text{باقي التركة} = 80,000 - 36,666.6 = 43,333.4$$ ريال

وما تبقى من التركة يوزع على الأولاد (للذكر مثل حظ الأنثيين)، ولذلك:

$$\text{نصيب البنت} = \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات} + 2\left(\text{عدد الأبناء}\right)} = \frac{43,333.4}{2+2(1)} = \frac{43,333.4}{4} = 10,833.35$$ ريال

$$\text{نصيب الولد} = 2 \times \text{نصيب البنت} = 2 \times 10,833.35 = 21,666.7$$ ريال.

التركة
80,000
أب
13,333.3
أم
13,333.3
الأولاد
43,333.4
زوجات
10,000
بنات
21,666.7
أولاد
21,666.7
2,500
2,500
2,500
2,500
10,833.35
10,833.35

للتحقق من الإجابة نجد أن مجموع الأنصبة:

$$\underbrace{(1)(21,666.7)}_{\text{الأولاد}} + \underbrace{(2)(10,833.35)}_{\text{البنات}} + \underbrace{(4)(2,500)}_{\text{الزوجات}} + \underbrace{13,333.3}_{\text{الأب}} + \underbrace{13,333.3}_{\text{الأم}} = 80,000$$

مثـــــال (30)

تُوفيت امرأة وتركت ميراثاً قدره $52,000$ ريال وتركت زوج وأم وثلاثة أبناء وبنت واحدة، احسب نصيب كل فرد من ميراث المرأة.

الحل

بالنظر للمثال نجد أنه يمكن حله باستخدام النموذج الثالث، وذلك على النحو التالي:

نصيب الزوج $= \left(\frac{1}{4}\right) \times 52,000 = 13,000$ ريال.

نصيب الأم $= \left(\frac{1}{6}\right) \times 52,000 = 8,666.6$ ريال.

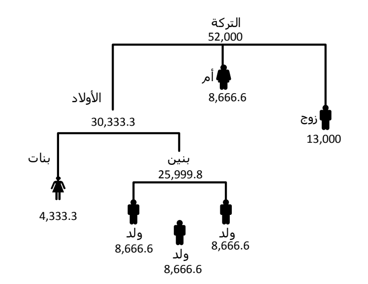
والأن نحسب ما تبقى لنا من التركة:

باقي التركة $= 52,000 - (13,000 + 8,666.66) = 30,333.34$ ريال

وما تبقى من التركة يوزع على الأولاد (للذكر مثل حظ الأنثيين)، ولذلك:

نصيب البنت $= \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات}+2\left(\text{عدد الأبناء}\right)} = \frac{30,333.3}{(3)2+1} = \frac{30,333.3}{7} = 4,333.33$ ريال

نصيب الولد $= 2 \times$ نصيب البنت $= 2 \times 4,333.34 = 8,666.68$ ريال.



للتحقق من الإجابة نجد أن مجموع الأنصبة:

$$\underbrace{(3)(8,666.68)}_{\text{الأولاد}} + \underbrace{(1)(4,333.33)}_{\text{البنات}} + \underbrace{13,000}_{\text{الزوج}} + \underbrace{8,666.66}_{\text{الأم}} = 52,000$$

النموذج الرابع:

ماتت امرأة وتركت زوج وأولاد (على الأقل ولد واحد)

الوارث	النصيب
الزوج	$\frac{1}{4}$
الأولاد	باقي التركة بشرط أن يرث الذكر مثل حظ الأنثيين (للولد ضعف نصيب البنت)

النموذج الخامس:

مات رجل وترك زوجة وأم وأب (بدون أولاد)

الوارث	النصيب
الزوجة	$\frac{1}{4}$
الأم	$\frac{1}{3}$ الباقي
الأب	باقي التركة

النموذج السادس:

ماتت امرأة وتركت زوج وأم وأب (بدون أولاد)

الوارث	النصيب
الزوج	$\frac{1}{2}$
الأم	$\frac{1}{3}$ الباقي
الأب	باقي التركة

مثـــــال (31)

تُوفي رجل وترك ميراثاً قدره 99,000 ريال وترك زوجة وأب وثلاث أبناء وبنت واحدة، احسب نصيب كل وارث علماً بأنه أوصي بمبلغ 20,000 ريال لجمعية لتحفيظ القرآن الكريم.

الحل

يجب التأكد أولاً من أن مقدار الوصية لا تزيد عن ثلث التركة ولذلك نحسب ثلث التركة:

$$\text{ثلث التركة} = \frac{99{,}000}{3} = 33{,}000$$

وبمقارنة المبلغ الموصى به وهو 20,000 ريال نجد أنه أقل من ثلث التركة ولذلك يجب تنفيذ الوصية، وما تبقى من التركة:

$$\text{ما تبقى من التركة} = 99{,}000 - 20{,}000 = 79{,}000 \text{ ريال}$$

وعند النظر للمثال نجد أنه مطابق للنموذج الأول ولذلك نجد أن:

$$\text{نصيب الزوجة} = \left(\frac{1}{8}\right) \times 79{,}000 = 9{,}875 \text{ ريال.}$$

والآن نحسب نصيب الأب:

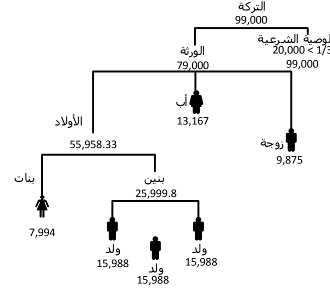
$$\text{نصيب الأب} = \left(\frac{1}{6}\right) \times 79{,}000 = 13{,}167 \text{ ريال.}$$

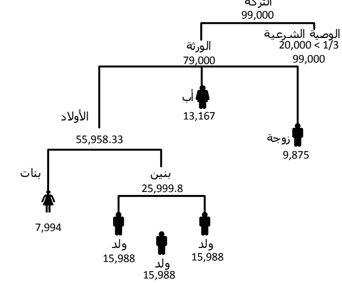
والآن نحسب ما تبقى لنا من التركة:

$$\text{باقي التركة} = 79{,}000 - (9{,}875 + 13{,}166.67) = 55{,}958.33 \text{ ريال}$$

$$\text{نصيب البنت} = \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات}+2\left(\text{عدد الأبناء}\right)} = \frac{55{,}958.33}{1+2(3)} = \frac{30{,}333.3}{7} = 7{,}994 \text{ ريال}$$

$$\text{نصيب الولد} = 2 \times \text{نصيب البنت} = 2 \times 7{,}994 = 15{,}988 \text{ ريال.}$$





للتحقق من الإجابة نجد أن مجموع الأنصبة والوصية:

$$\underbrace{(3)(15{,}988)}_{\text{الأولاد}} + \underbrace{(1)(7{,}994)}_{\text{البنات}} + \underbrace{9{,}875}_{\text{الزوجة}} + \underbrace{13{,}167}_{\text{الأب}} + \underbrace{20{,}000}_{\text{الوصية}} = 99{,}000$$

مثـــــال (32)

تُوفيت امرأة وتركت ميراث قدره 160,000 ريال وتركت زوج وابنان وثلاثة بنات احسب نصيب كل فرد من الورثة.

الحل

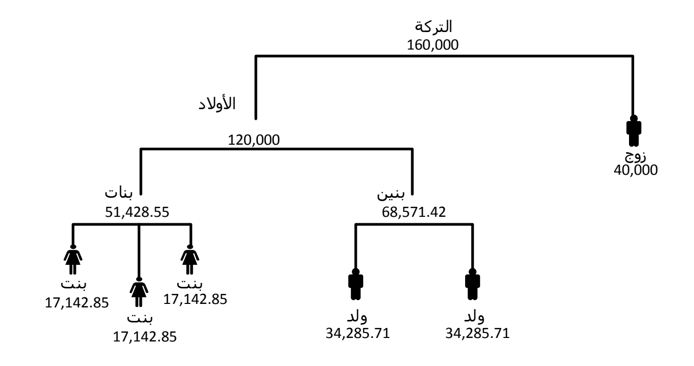
عند النظر للمثال نجد أنه مطابق للنموذج الرابع ولذلك نجد أن:

$$\text{نصيب الزوج} = \left(\frac{1}{4}\right) \times 160{,}000 = 40{,}000 \text{ ريال.}$$

$$\text{ما تبقى من التركة} = 160{,}000 - 40{,}000 = 120{,}000 \text{ ريال}$$

$$\text{نصيب البنت} = \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات}+2\left(\text{عدد الأبناء}\right)} = \frac{120{,}000}{3+2(2)} = \frac{120{,}000}{7} = 17{,}142.85 \text{ ريال}$$

$$\text{نصيب الولد} = 2 \times \text{نصيب البنت} = 2 \times 17{,}142.85 = 34{,}285.71 \text{ ريال.}$$



حاول أن تتحقق من الإجابة بنفسك.

مثـــــال (33)

تُوفي رجل عقيم وترك ميراثاً قدره 60,000 ريال، ترك هذا الرجل زوجة وأم وأب، احسب نصيب كل فرد من الورثة، علماً بأن كان عليه دين مقداره 10,000 ريال

الحل

أولاً يجب سداد دين الرجل ويخصم من التركة ولذلك نجد أن ما يتبقى من التركة بعد سداد الدين:

$$\left(\begin{array}{c}\text{ما تبقى من التركة}\\ \text{بعد سداد الدين}\end{array}\right) = 60{,}000 - 10{,}000 = 50{,}000 \text{ ريال}$$

هذا المثال مطابق للنموذج الخامس ولذلك نجد أن:

$$\text{نصيب الزوجة} = \left(\frac{1}{4}\right) \times 50{,}000 = 12{,}500 \text{ ريال.}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{ما تبقى من التركة}\\ \text{بعد دفع حق الزوجة}\end{array}\right) = 50{,}000 - 12{,}500 = 37{,}500 \text{ ريال}$$

$$\text{نصيب الأم} = \left(\frac{1}{3}\right) \times 37{,}500 = 12{,}500 \text{ ريال.}$$

وما تبقى من التركة يكون نصيب الأب:

$$\text{نصيب الأب} = 37{,}500 - 12{,}500 = 25{,}000 \text{ ريال}$$

للتحقق من الإجابة نجد أن مجموع الأنصبة والوصية:

$$\underbrace{12{,}500}_{\text{الزوجة}} + \underbrace{(12{,}500)}_{\text{الأم}} + \underbrace{(25{,}000)}_{\text{الأب}} + \underbrace{10{,}000}_{\text{الدين}} = 60{,}000$$

مثـــــال (34)

تُوفيت سيدة وتركت إرثاً قدره 190,000 ريال، تركت هذه السيدة زوج وأم وأب، وأصت هذه السيدة بمبلغ 20,000 ريال تبرع لإحدى الجمعيات الخيرية، احسب نصيب كل فرد من الورثة علماً بأن هذه السيدة كان عليها ديناً قدره 50,000 ريال.

الحل

أولاً يجب سداد دين السيدة ويخصم من التركة ولذلك نجد أن ما يتبقى من التركة بعد سداد الدين:

$$\begin{pmatrix}\text{ما تبقى من التركة}\\ \text{بعد سداد الدين}\end{pmatrix} = 190{,}000 - 50{,}000 = 140{,}000 \text{ ريال}$$

ثانياً: أوصت هذه السيدة بمبلغ للجمعيات الخيرية، نتأكد من أن هذا المبلغ أقل من ثلث التركة المتبقية

$$\left(\frac{1}{3}\right)(140{,}000) = 46{,}666.66 > 20{,}000$$

وبالتالي فإن مبلغ الوصية $20{,}000$ أقل من ثلث ما تبقى من التركة بعد سداد الدين، نحسب بعد ذلك ما تبقى من تركة تلك السيدة بعد الوصية

$$\begin{pmatrix}\text{ما تبقى من التركة}\\ \text{بعد سداد الوصية}\end{pmatrix} = 140{,}000 - 20{,}000 = 120{,}000 \text{ ريال}$$

وعند قراءة رأس المثال نجده مطابقاً للنموذج السادس ولذلك نجد أن:

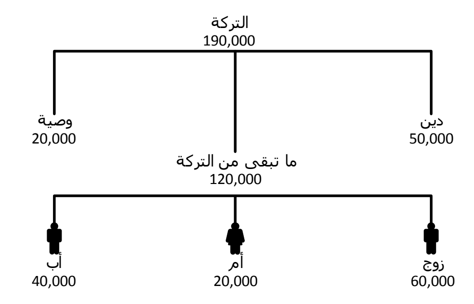
$$\text{نصيب الزوج} = \left(\frac{1}{2}\right) \times 120{,}000 = 60{,}000 \text{ ريال.}$$

$$\begin{pmatrix}\text{ما تبقى من التركة}\\ \text{بعد دفع حق الزوج}\end{pmatrix} = 120{,}000 - 60{,}000 = 60{,}000 \text{ ريال}$$

$$\text{نصيب الأم} = \left(\frac{1}{3}\right) \times 60{,}000 = 20{,}000 \text{ ريال.}$$

وما تبقى من التركة يكون نصيب الأب:

$$\text{نصيب الأب} = 60{,}000 - 20{,}000 = 40{,}000 \text{ ريال}$$



للتحقق من الإجابة نجد أن مجموع الأنصبة والوصية والدين:

$$\underbrace{(40{,}000)}_{\text{الأب}} + \underbrace{(20{,}000)}_{\text{الأم}} + \underbrace{60{,}000}_{\text{الزوج}} + \underbrace{20{,}000}_{\text{الوصية}} + \underbrace{50{,}000}_{\text{الدين}} = 190{,}000$$

الاختبار الذاتي (9)

Self-Test (9)

اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) إذا كانت النسبة بين وزن عبد الرحمن إلى وزن عبد العزيز هي 6 :5 وكان وزن عبد الرحمن 60 كيلوجرام، يكون وزن عبد العزيز:

a. 70 كجم   b. 50 كجم   c. 40 كجم

(ب) اذا كان عدد الطلاب (الذكور) في جامعة الحدود الشمالية 540 طالباً، وكانت نسبة عدد الطلاب الي عدد الطالبات 4: 5 يكون عدد كل من الطلاب الي الطالبات هي

5: 4 a. 540,600   b. 675 ,540   c. 250,190

(ج) يجهز طباخ في أحد المطاعم 100 وجبة غداء جميعها من نفس النوع مستخدماً لذلك 40 كيلوجرام من اللحم، فيكون معدل كمية اللحم اللازمة لإعداد أربع وجبات هو

a. 0.8 كجم   b. 1.6 كجم   c. 1.0 كجم

(د) قيمة x التي تجعل التناسب $\frac{2}{6} = \frac{10}{x}$ هي

a. 1.2   b. $\frac{20}{6}$ c. 30

(هـ) إذا كانت زكاة المال المستحقة على رجل مقدارها 3500 ريال، فإن هذا الرجل يملك مبلغاً من المال قدره:

a. 140,000 ريال   b. 150,000 ريال   c. 130,000 ريال

(و) تُوفيت سيدة عاقر وتركت إرثاً قدره 340,000 ريال، تركت هذه السيدة زوج وأم وأب، وأصت هذه السيدة بمبلغ 200,000 ريال لأختها، وكان على هذه السيدة ديناً قدره 40,000 ريال، يكون نصيب الزوج :

a. 170,000 ريال   b. 50,000 ريال   c. 150,000 ريال

(ز) تُوفي رجل وترك ميراثاً قدره 240,000 ريال وعند حصر من له حق الإرث وجد عدد ثلاث زوجات وأم وأب وثلاثة أولاد ذكور وخمسة بنات. فيكون نصيب كل بنت من تركة ذلك الرجل هي:

a. 12,818 ريال   b. 10,000 ريال   c. 11,818 ريال

تمـــــــارين

Exercises

1. إذا تم تقسيم مبلغ 150 ريال على ثلاثة أشخاص بنسبة $1:2:3$، احسب نصيب كل واحد منهم.

2. سرعة الرياح في مدينة الدمام هي $18\ km/h$ وسرعة الرياح في مدينة جدة هي $12km/h$، أحسب النسبة بين سرعتي الرياح في المدينتين.

3. إذا تم تقسيم كتلة 220 كجم إلى كتلتين بنسبة $\frac{1}{4}:\frac{2}{3}$ فما هو مقدار كل كتلة.

4. احسب نسبة طول أي ضلع من أضلاع مثلث متساوي الأضلاع إلى محيطه.

5. احسب معدل مساحة الدائرة إلى قطرها.

6. قطع سائق مسافة 190 كم بسيارته مستغرقاً ساعتين، أوجد سرعة السيارة.

7. حول كلاً من الكسور $\frac{1}{3},\frac{8}{10},\frac{1}{2},\frac{3}{8}$ إلى نسبة مئوية.

8. احسب ما تساويه نسبة 25% من 400.

9. ذهب أحد الأشخاص لشراء حاسب آلي (كمبيوتر) فوجد الثمن المكتوب عليه $2,000$ ريال وكان هناك تخفيض على أجهزة الحاسب بمقدار 15%، فكم يدفع هذا الشخص نظير الحاسب.

10. في أحد المحلات التجارية يتم بيع علبة اللبن بخمسة ريالات وإذا اشتريت علبتين تحصل على خصم 10% أما إذا اشتريت ثلاث علب فستحصل على خصم 15%، احسب ثمن شراء ست علب من اللبن. هل ما تم توفيره يكفي لشراء أي علب من اللبن.

11. اشترى تاجر فاكهة شحنة من الفاكهة بمبلغ $180,000$ ريال، وبعد أن اشتراها وجد جزءاً تالفاً منها لسوء التخزين، فباع الباقي بمبلغ $160,000$ ريال، احسب نسبة خسارة ذلك التاجر.

12. اشترى رجلاً منزلاً بمبلغ $75,000$ ريال وسيارة بمبلغ $100,000$ ريال، إذا باع المنزل بخسارة 15% وباع السيارة بمكسب 25%، احسب صافي مكسبه أو خسارته.

13. هل الأعداد $2,5,6,9$ متناسبة؟

14. احسب قيمة x التي تجعل $\frac{2}{3}=\frac{6}{x}$.

15. فاتورة تليفون قيمتها 800 ريال، تأخر صاحبها عن دفعها فزادت عليه قيمتها بنسبة 10%، احسب قيمة الفاتورة بعد الزيادة.

16. اشترى مطعم 260 كجم من اللحوم، تم توزيعها على الأطباق العربية والفرنسية واليابانية بنسبة 5 :4 :3، احسب نصيب كل نوع من الأطباق.

17. وزع أحد الآباء مبلغ 6,000 بين ابنيه عبد الرحمن وعبد العزيز وذلك لشاء ملابس عيد الفطر بنسبة 5 :7، فما نصيب كل منهما من هذا المبلغ.

18. حصل عامل على زيادة في الراتب بقدر 5% وكان راتبه 1,500، احسب راتب العامل بعد الزيادة.

19. احسب مقدار زكاة المال لمبلغ 10,000 ريال حال عليه الحول، علماً بأن سعر جرام الذهب وقت الإخراج 100 ريال.

20. توفى رجل وترك ميراثاً قدره 72,000 ريال وترك زوجة وأم وأب وابن وبنتين، احسب نصيب كل فرد من الورثة.

21. توفيت امرأة وتركت ميراثاً مقداره 150,000 ريال وتركت زوج وأم وأب وابن وثلاث بنات، احسب نصيب كل فرد من الورثة.

22. توفى رجل وترك ميراث قدره 15,500 ريال وترك ثلاث زوجات وأم وأب وثلاث بنات، أوجد نصيب كل فرد من الورثة.

23. توفى رجل عقيم وترك ميراثاً قدره 80,000 ريال وترك زوجة وأم وأب، احسب نصيب كل فرد من الورثة.

24. توفيت امرأة وتركت ميراثاً قدره 120,000 ريال وتركت زوج وأم وأب فقط، احسب نصيب كل فرد من الورثة.

25. مات رجل وترك مبلغ قدره 2,400 ريال وترك زوجة بدون أولاد وورثة آخرين، احسب نصيب الزوجة.

26. توفى رجل وترك ميراثاً قدره 8,0000 ريال وترك زوجة وأم وأب وثلاث أبناء وبنات، احسب نصيب كل فرد من الورثة، علماً بأنه أوصي بمبلغ 10,000 ريال لدار لرعاية الأيتام.

27. تُوفي رجل عقيم وترك إرثاً قدره 640,000 ريال، ترك هذا الرجل زوجة وأم وأب، وأوصى بمبلغ 200,000 ريال لأخيه، وكان على هذه الرجل ديناً قدره 10,000 ريال، فما هو نصيب كل فرد من ورثة ذلك الرجل.

الباب الثالث:
المعادلات والمتراجحات الخطية

الهدف من هذا الباب

في الجزء الأول من الباب سنتعرف على كيفية توقيع نقطة في الاحداثيات الكارتيزية ثم نتعلم كيفية التمثيل البياني لمعادلة ونتعلم أيضاً ايجاد البعد بين نقطتين واحداثيات التنصيف ثم نتعرف على كيفية حل معادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد ومجهولين ، بعد ذلك نتعرف على المعادلة التربيعية والقانون العام لهاوتمثيلها بيانياً، وفي الجزء الرابع نتعرف على معادلة الخط المستقيم وميله وأخيراً نتعرف على المتباينات أو المتراجحات الخطية وطرق حلها .



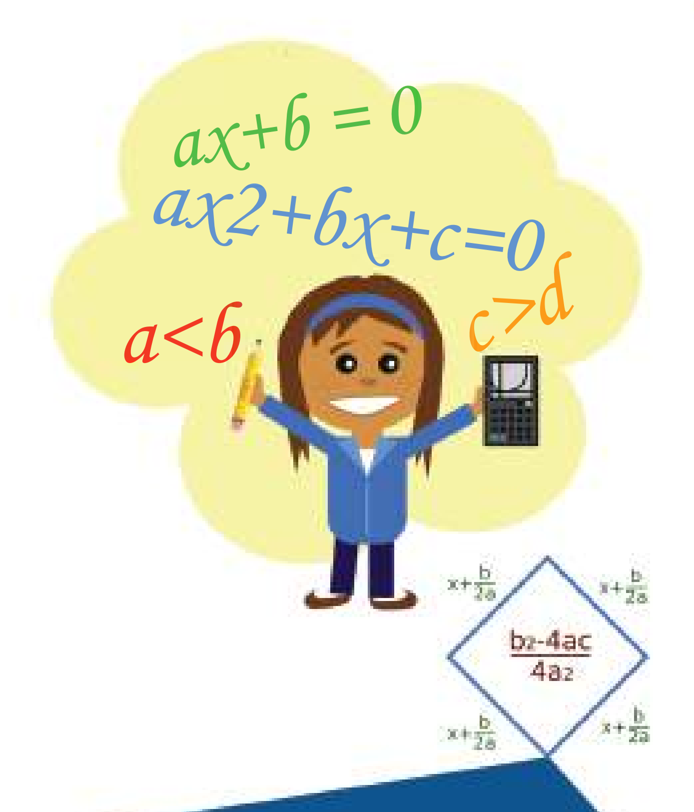
الفصل الأول:
الاحداثيات الكارتيزية

2 الفصل الثاني:
حل المعادلات الخطية

3 الفصل الثالث
حل المعادلة التربيعية

4 الفصل الرابع
معادلة الخط المستقيم

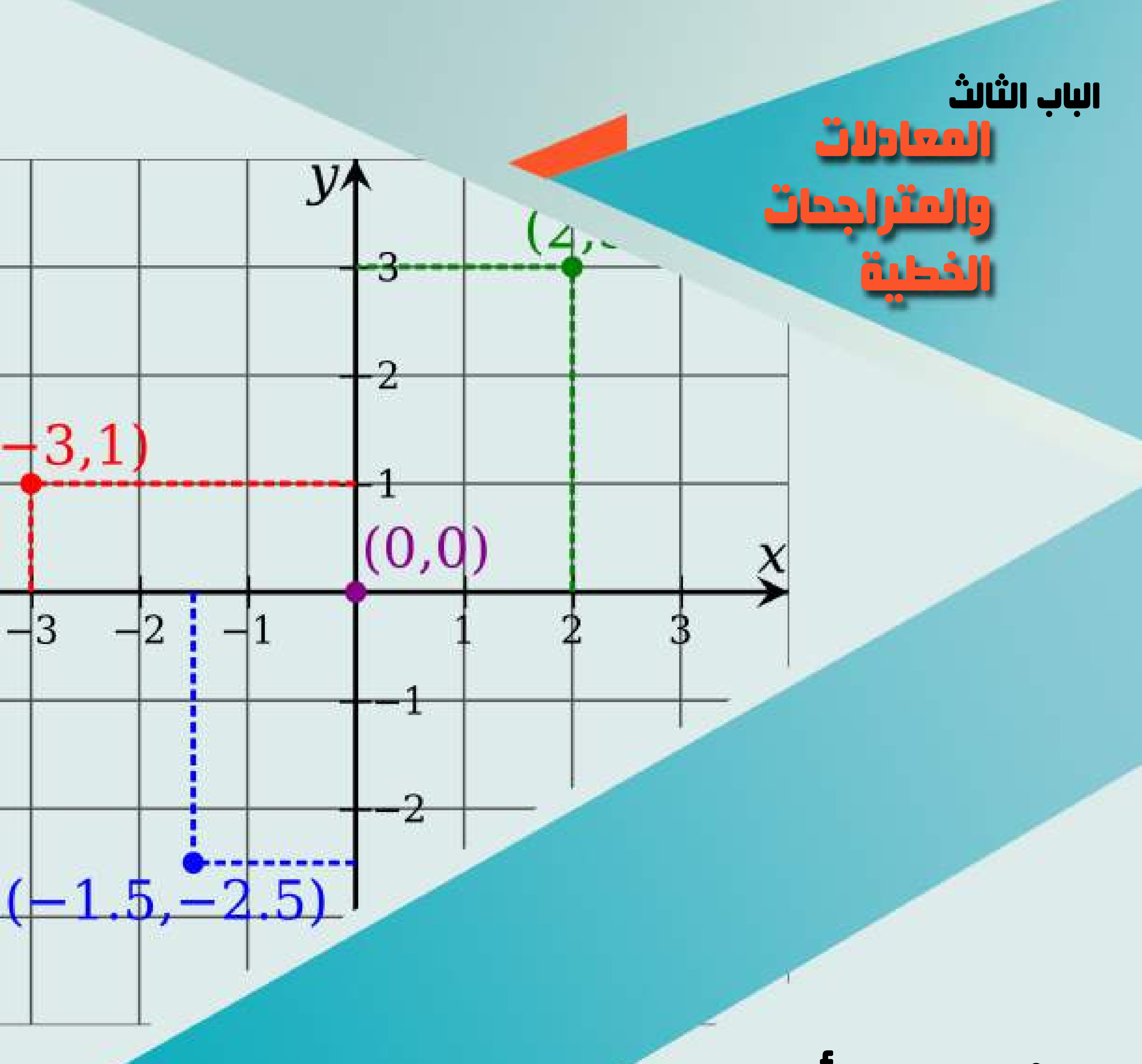
5 الفصل الخامس
المتراجحات الخطية



بعد الانتهاء من هذا الباب يجب أن تكون قادراً على فهم:
التعامل مع الاحداثيات الكارتيزية وتوقيع نقطة أو خط أو معادلة عليها، وأن تكون قادراً على حل معادلة خطية في مجهول أو مجولين، وأن تعي جيداً القانون العام لمعادلة الدرجة الثانية، أن تكون ملماً بمعادلة الخط المستقيم وحساب ميله وتمثيله في المحاور الكارتيزية، ثم تكون قادراً على فهم وحل المتراجحة الخطية.

الباب الثالث

المعادلات والمتراجحات الخطية



الفصل الأول

الاحداثيات الكارتيزية

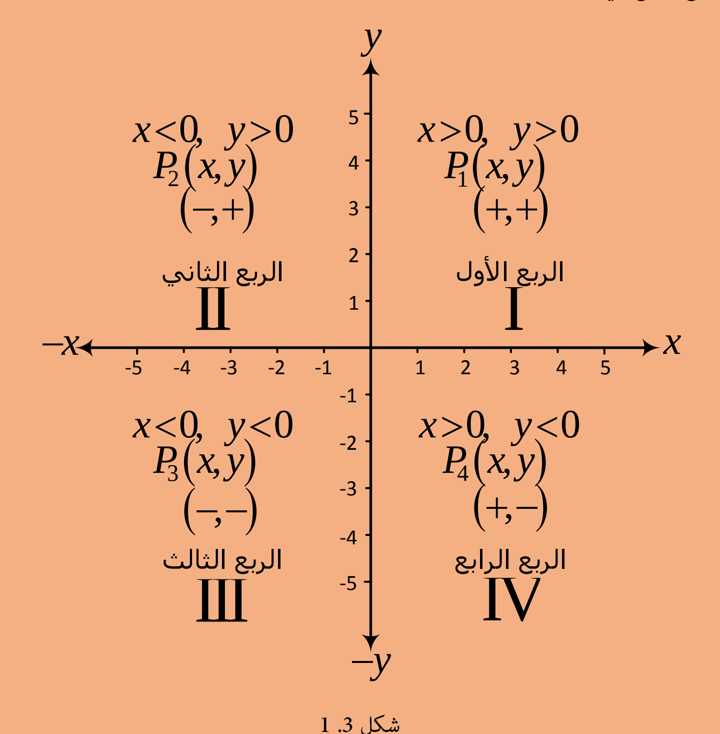
الفصل الأول : الاحداثيات الكارتيزية

محتويات الفصل

الفصل الأول: الاحداثيات الكارتيزية
Section (1): The Cartesian Coordinate

النقطة في الاحداثيات الكارتيزية

يستخدم نظام الإحداثيات الكارتيزية أو الديكارتية لتحديد نقطة P في مستوى بزوج مرتب من الأعداد الحقيقية $P(x,y)$ حيث يطلق على x الاحداثي x وعلى y الاحداثي y ولتمثيل النقطة $P(x,y)$ يتم رسم محورين متعامدين إحداهما أفقي يسمى المحور x $(x-axis)$ والآخر رأسي يسمى المحور y $(y-axis)$ وبالتالي يكون لدينا أربعة مناطق نطلق عليها أرباع (الربع الأول - الربع الثاني - الربع الثالث - الربع الرابع) في اتجاه عكس عقارب الساعة. أنظر شكل 1.3.



شكل 3. 1

ملحوظة (1)

- تسمى نقطة تقاطع المحورين بنقطة الأصل واحداثياتها $(0,0)$
- أي نقطة تقع على محور x الإحداثي y لها دائماً مساوياً للصفر.
- أي نقطة تقع على محور y الإحداثي x لها دائماً مساوياً للصفر.



إبن البناء

هو أبو العباس أحمد بن عثمان العدوي، وهو رياضي وفلكي مغربي نشأ في مراكش في الفترة (654ـ 721هـ) (1256ـ1321م)، وكان أبوه يعمل بناء لذلك سمي بابن البناء.

أهم مؤلفاته:

كتاب في الجبر و المقابلة، تلخيص أعمال الحساب، كتاب في المساحات.

مثـــــال (1)

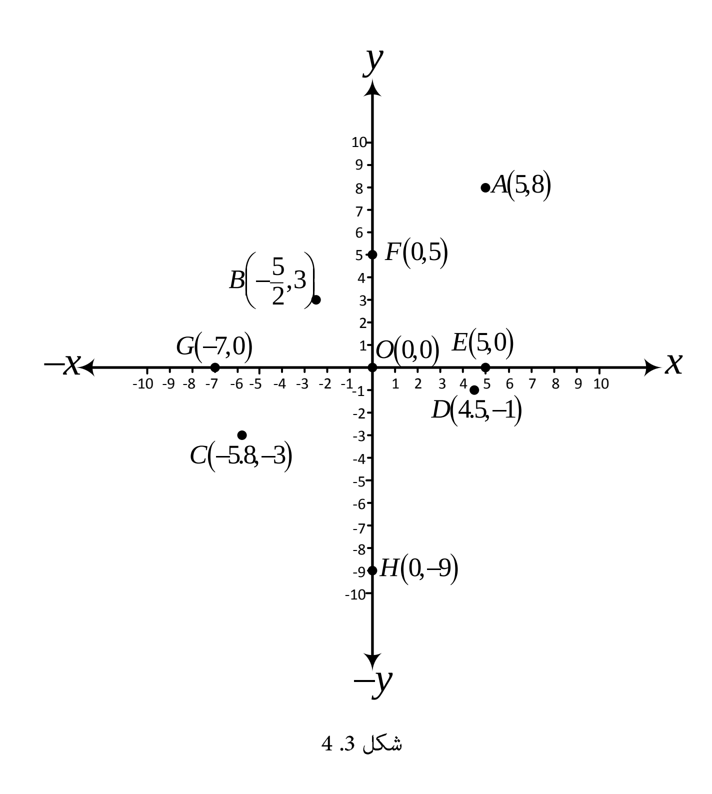
وقع النقاط التالية بنظام الإحداثيات الكارتيزية موضحاً الربع الذي تقع فيه كل نقطة.

$$A(5,8),\quad B\left(-\frac{5}{2},3\right),\quad C(-5.8,-3),\quad D(4.5,-1),$$

$$E(5,0),\quad F(0,5),\quad G(-7,0),\quad H(0,-9),\quad O(0,0)$$

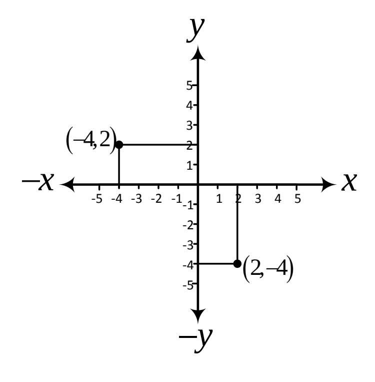
الحل

الشكل 4.3 يوضح مكان كل نقطة من النقاط المعطاة على نظام الاحداثيات الكارتيزية.



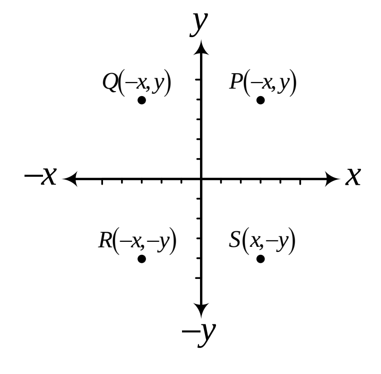
شكل 3. 4

وبالنظر إلى الشكل 4.3 نجد أن كلاً من النقطة $A(5,8)$ تقع في الربع الأول، والنقطة $B\left(-\frac{5}{2},3\right)$ تقع في الربع الثاني، أما النقطة $C(-5.8,-3)$ فتقع في الربع الثالث، والنقطة $D(4.5,-1)$ تقع في الربع الرابع. وبالنظر إلى النقطة $E(5,0)$ فنلاحظ أنها تقع على محور x وفي الاتجاه الموجب والنقطة $F(0,5)$ فإنها تقع على المحور y وفي الاتجاه الموجب أيضاً، أما النقطة $G(-7,0)$ فتقع على المحو x ولكن في الاتجاه السالب، والنقطة $H(0,-9)$ فإنها تقع على المحور y وفي الاتجاه السالب، والنقطة الأخيرة $O(0,0)$ فإنها تقع عند تقاطع المحورين وهي تمثل نقطة الأصل.



شكل 3. 2

لاحظ في الشكل 2.3 أن النقطة $(2,-4)$ ليست هي النقطة $(-4,2)$ أي أن اختلاف وضع الأزواج المرتبة لا يعطي نفس النقطة.



شكل 3. 3

فنلاحظ في الشكل 3.3 أن النقطة P في الربع الأول، والنقطة Q تقع في الربع الثاني والنقطة R في الربع الثالث والنقطة S في الربع الرابع.

التمثيل البياني لمعادلة

عند تمثيل معادلة نقوم بتكوين جدول بقيم كلاً من x, y ويتم اختيار قيم مناسبة للمتغير x وبالتعويض في المعادلة نحصل على القيم المناظرة للمتغير y والأمثلة التالية ستوضح لنا ذلك.

مثـــال (2)

ارسم كلا من المعادلتين:

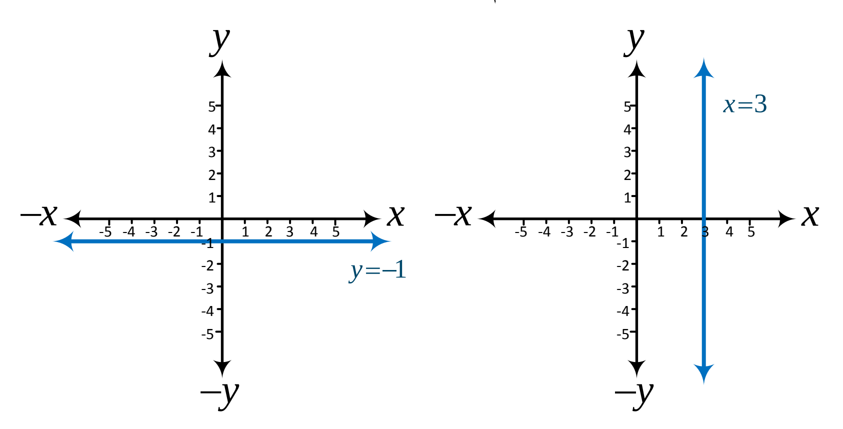
$$y = -1, \qquad x = 3$$

الحل

من جدول القيم للمعادلة الأولى يمكن توقيع مجموعة النقاط التي اخترناها على محور الاحداثيات، وبالتوصيل بين هذه النقاط نحصل على الشكل 5.3 الرسم جهة اليمين.

x	$y=-1$
-4	-1
-3	-1
-2	-1
-1	-1
0	-1
1	-1
2	-1
3	-1
4	-1

جدول القيم للمعادلة $y = -1$



شكل 3. 5

$x=3$	y
3	-4
3	-3
3	-2
3	-1
3	0
3	1
3	2
3	3
3	4

جدول القيم للمعادلة $x = 3$

ونلاحظ من الشكل أن المعادلة تمثل خطاً مستقيماً يوازي محور x وذلك كان متوقعاً من خلال جدول القيم، حيث أن جميع قيم y المناظرة لقيم x ثابتة وتساوي دائماً -1.

ومن جدول القيم للمعادلة الثانية $x = 3$ نحصل على الشكل 5.3 جهة اليسار، ونلاحظ من الشكل أن المعادلة تمثل خطاً مستقيماً يوازي محور y وذلك لأن جميع قيم x ثابتة وتساوي دائماً 3.

مثـــال (3)

مثل بيانياً المعادلة:

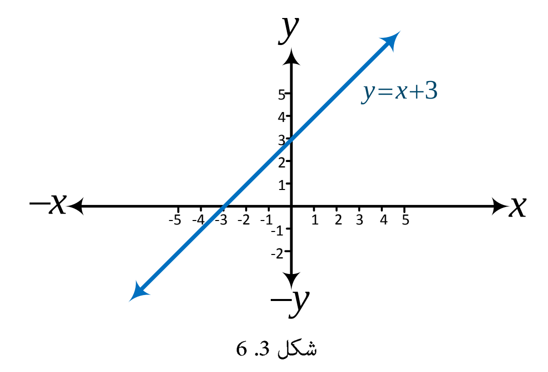
$$y = x + 3$$

الحل

بتكوين جدول القيم المقابل وتوقيع هذه النقاط على محور الاحداثيات نحصل على الشكل 6.3 وهي تمثل معادلة خط مستقيم (معادلة خطية) لا يوازي أي من محاور الاحداثيات ولكنه عبارة عن خط مستقيم مائل.

x	$y=x+3$
-4	-1
-3	0
-2	1
-1	2
0	3
1	4
2	5
3	6
4	7

جدول القيم للمعادلة $y = x + 3$



شكل 3. 6

مثـــــال (4)

مثل بيانياً المعادلة:

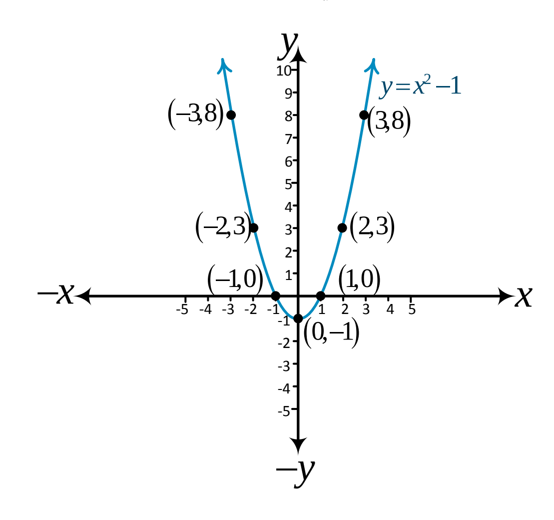
$$y = x^2 - 1$$

الحل

بتكوين جدول القيم المقابل وتوقيع هذه النقاط على محور الاحداثيات نحصل على الشكل 7.3 وهي تمثل معادلة قطع مكافئ له مجموعة من الخواص وهي ليست مجال دراستنا.

x	$y=x^2-1$
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8

جدول القيم للمعادلة
$y = x^2 - 1$



شكل 7 .3

البعد بين نقطتين في المستوى
(Distance between two Points)

تعطى المسافة بين نقطتين $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ في مستوى الإحداثيات الكارتيزية بالمعادلة:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

شكل 8 .3

البرهان:

بالنظر إلى الشكل 8.3 وبتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث PCQ القائم الزاوية في C نجد أن:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

أي أن:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثـــال (5)

احسب المسافة بين النقطتين:

$$P(-2,3), \qquad Q(3,-7)$$

الحل

بالتعويض في قانون حساب المسافة بين نقطتين نجد أن:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(3 - (-2)\right)^2 + \left((-7) - 3\right)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$ وحدة طول

مثـــال (6)

أوجد جميع النقاط المحتملة والتي احداثي x لها هو 1 والمسافة بينها وبين النقطة $Q(5,5)$ هي 5 وحدات طول.

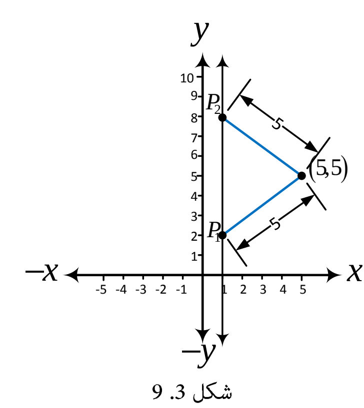
الحل

المطلوب البحث عن نقطة لنفرض أنها P معلوم لدينا الاحداثي $x = 1$ ولا نعلم الاحداثي الآخر، لنفرض أن هذه النقطة هي $P(1,y)$، وهذه النقطة تبعد مسافة 5 وحدات طول عن النقطة $Q(5,5)$ أي أن:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$5 = \sqrt{(5-1)^2 + (5-y)^2}$$

$$5 = \sqrt{16 + (5-y)^2}$$



شكل 3. 9

بتربيع الطرفين نجد أن:

$$25 = 16 + (5-y)^2$$

$$9 = (5-y)^2$$

وبأخذ الجذر للطرفين نجد أن:

$$\pm 3 = 5 - y$$

أي أن $y = 2$ أو أن $y = 8$ وبالتالي تكون النقاط المحتملة هي:

$$P_1(1,2), \qquad P_2(1,8)$$

احداثيات نقطة المنتصف بين نقطتين في المستوى

(Midpoint between two Points)

بفرض النقطتين $P(x_1, y_1)$، $Q(x_2, y_2)$ تقعان في مستوى الاحداثيات، فإن إحداثيات النقطة M التي تنصف المسافة بين هاتين النقطتين تُعطى بالعلاقة:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثـــــال (7)

احسب المسافة بين النقطتين $P(-2, -4)$، $Q(5, -1)$ ثم أوجد احداثيات النقطة M التي تنصف المسافة الواصلة بين هاتين النقطتين.



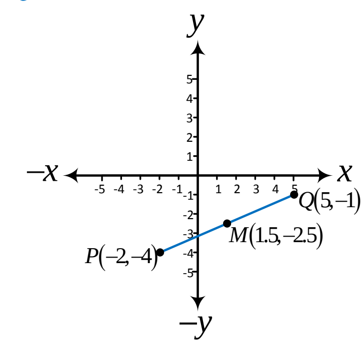
الحل

بالتعويض في قانون حساب المسافة بين نقطتين نجد أن:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(5 + 2)^2 + (-1 + 4)^2}$$
$$= \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$$ وحدة طول

وللحصول على نقطة التنصيف M نستخدم العلاقة:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{5 - 2}{2}, \frac{-1 - 4}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{-5}{2}\right)$$



شكل 3. 10

مثـــــال (8)

إذا كان كل من a, b أعداداً حقيقية، اثبت أن الخط المستقيم الذي معادلته $y = x$ ينصف المسافة بين النقطتين (a, b) ، (b, a) مهما كانت قيمة a, b.

الحل

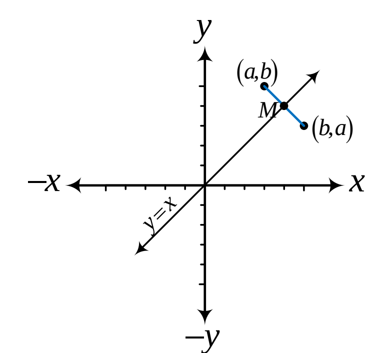
لإثبات المطلوب نبدأ باستخدام العلاقة:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

وحيث أن احداثيات النقطتين هما (a, b)، (b, a) نجد أن:

$$M = \left(\frac{a + b}{2}, \frac{b + a}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{a + b}{2}, \frac{a + b}{2}\right)$$

ومن تلك النتيجة نجد أن الاحداثي x مساوياً للإحداثي y وهي نفس معادلة المستقيم المعطى، ولذلك فإن المستقيم $y = x$ دائماً يمر بالنقطة M مهما تغيرت كلاً من a, b.



شكل 3. 11

مثـــال (9)

إذا كانت النقطة $C(6,1)$ هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$، أوجد إحداثي النقطة B إذا علمت أن إحداثي النقطة A هي $A(5,2)$.

الحل

نفرض أن النقطة $B(x_2, y_2)$، وباستخدام علاقة التنصيف

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

وبالتعويض عن النقطة M بالنقطة $C(6,1)$ والنقطة $A(5,2) = A(x_1, x_2)$، والنقطة $B(x_2, y_2)$ نجد أن:

$$(6,1) = \left(\frac{5 + x_2}{2}, \frac{2 + y_2}{2}\right)$$

بضرب طرفي العلاقة $2 \times$ نحصل على:

$$(12,2) = (5 + x_2, 2 + y_2)$$

أي أن:

$$12 = 5 + x_2 \Rightarrow x_2 = 7, \qquad 2 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 0$$

ومن ذلك نستنتج أن إحداثيات النقطة B هي:

$$B(7,0)$$

الاختبار الذاتي (10)
Self-Test (10)

1. اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) النقطة $(-105,772)$ تقع في الربع:

a. الأول　　b. الثاني　　c. الرابع

(ب) النقطة $(0,60)$ تقع على محور:

a. x　　b. y　　c. غير ذلك

(ج) النقطة $(60,0)$ تقع على محور:

a. x　　b. y　　c. غير ذلك

(د) المسافة بين النقطتين $(1,5),(6,17)$ تساوي:

a. 12　　b. 13　　c. $10\sqrt{5}$

(هـ) المسافة بين النقطتين $(a,b),(b,a)$ تساوي:

a. $\pm(a+b)\sqrt{2}$　　b. $\pm(a-b)\sqrt{2}$　　c. $\pm(a-b)$

(و) إحداثي النقطة التي تنصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(7,10),(13,6)$ هي:

a. $(10,8)$　　b. $(8,10)$　　c. $(10,6)$

(ز) النقطة التي تنصف المسافة بين النقطتين $(a,b),(-a,-b)$ هي

a. $(a,-b)$　　b. نقطة الأصل　　c. $(b,-a)$

تمـــــــارين

Exercises

1. حدد موضع النقاط التالية في مستوى الاحداثيات (أي ربع من الارباع)

a. $(-1,-4)$ b. $(4,5)$

c. $(1,-5)$ d. $(-2,5)$

2. احسب المسافة بين كل نقطتين مما يلي:

a. $(-2,3),(1,-7)$ b. $(1,4),(-1,-2)$

c. $(4,-5),(6,7)$ d. $(-1,-3),(0,4)$

e. $(0,5),(0,-4)$ f. $(-2,-3),(-3,-6)$

3. أوجد أحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين مما يلي:

a. $(-2,3),(1,-4)$ b. $(-1,-5),(1,5)$

c. $(3,1),(-1,3)$ d. $(-6,-1),(2,3)$

4. احسب الجزء المقطوع من محور x ومحور y للمنحنيات التالية

a. $y = x^2 - 9$ b. $y = \sqrt{x-1}$

c. $y = 3x + 5$ d. $y = x^3 + 6$

ملحوظة: (لحساب الجزء المقطوع من محور x نضع $y = 0$ في معادلة المنحنى ثم نحسب قيمة x، ولحساب الجزء المقطوع من محور y نضع $x = 0$ ونحسب قيمة y)

5. أوجد جميع النقاط التي تقع على محور x والتي تبعد مسافة 2 وحدة طول عن النقطة $(-1,1)$.

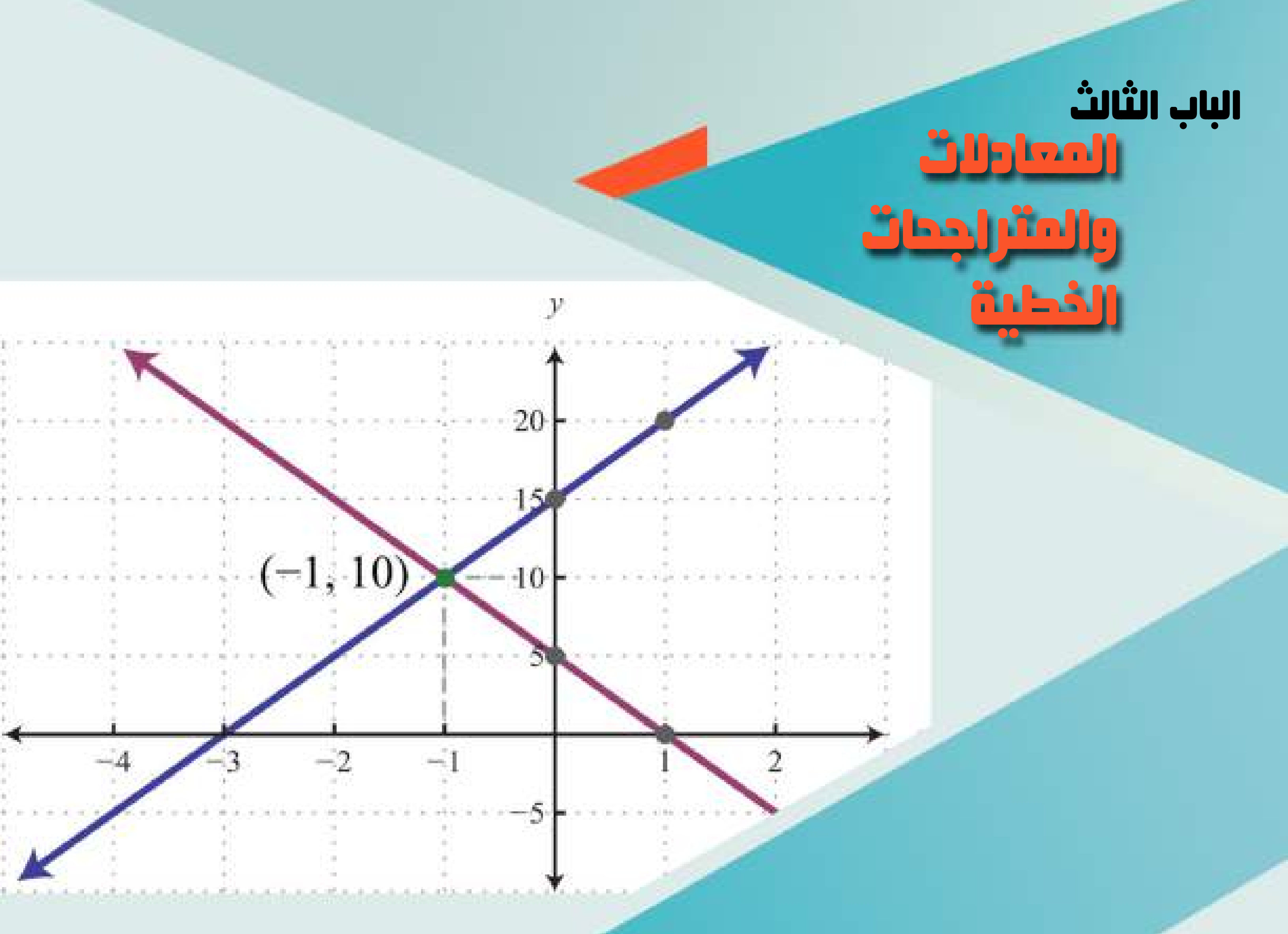
6. أوجد جميع النقاط على الشكل $(x,-x)$ والتي تبعد مسافة 1 وحدة طول عن نقطة الأصل.

7. اثبت أن النقاط الثلاث التالية هي عبارة عن رؤوس مثلث قائم الزاوية مع ذكر اسم الزاوية القائمة لهذا المثلث:

$A(-3,1),\quad B(4,0),\quad C(0,-3)$

الباب الثالث

المعادلات والمتراجحات الخطية



الفصل الثاني

حل المعادلات الخطية

الفصل الثاني: حل المعادلات الخطية

محتويات الفصل

الفصل الثاني: حل المعادلات الخطية

Section (2): Solving Linear Equations

معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد

تعرف معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد x على أنها علاقة بين مجموعة من المتغيرات وتكون على الصورة:

$$ax + b = 0\,, \qquad a \neq 0$$

وبالتالي فان حل هذه المعادلة يكون على الصورة:

$$x = -\frac{b}{a}$$

مثـــــال (1)

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة:

$$4x - 8 = 0$$

الحل

لحل هذه المعادلة يتم نقل 8 إلى الطرف الآخر (بعد علامة $=$) وبعكس الإشارة، أي أن:

$$4x = 8$$

وبقسمة الطرفين على معامل x وهو 4 نحصل على:

$$x = \frac{8}{4} = 2$$

للتحقق من الإجابة بالتعويض بقيمة $x = 2$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$4x - 8 = 4(2) - 8 = 0$$

مثـــــال (2)

أوجد قيمة y التي تحقق المعادلة:

$$-5y + 35 = 0$$

الحل

لحل هذه المعادلة يتم نقل 35 إلى الطرف الآخر (بعد علامة $=$) وبعكس الإشارة، أي أن:

$$-5y = -35$$

وبقسمة الطرفين على معامل y وهو -5 نحصل على:

$$y = \frac{-35}{-5} = 7$$

للتحقق من الإجابة بالتعويض بقيمة $y = 7$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$-5y + 35 = -5(7) + 35 = 0$$



البتاني

هو أبو عبدالله محمد بن جابر بن سنان الحراني الصابي فلكي و منجم رياضي ولد في حران (تركيا) عام (240ـ244هـ) (854 ـ 858م) و توفي قرب سامراء(العراق) في (317هـ ـ929م) وإلى جانب إنجازاته في علم الفلك وله إسهامات كبيرة في الرياضيات.

أهم مؤلفاته:

كان البتاني أول من أستخدم الجيوب و الأوتار في قياس المثلثات و الزوايا و من أوائل من استخدموا الرموز في المعادلات الرياضية وكان للبتاني فضل إدخال حساب المثلثات إلى الغرب وله بعض المقالات في حساب المثلثات الكروية.

مثـــــال (3)

أوجد قيمة t التي تحقق المعادلة:

$$2t + 7 = -3$$

الحل

لحل هذه المعادلة يتم نقل 7 إلى الطرف الآخر (بعد علامة $=$) وبعكس الإشارة، أي أن:

$$2t = -3 - 7 = -10$$

وبقسمة الطرفين على معامل t وهو 2 نحصل على:

$$y = \frac{-10}{2} = -5$$

للتحقق من الإجابة بالتعويض بقيمة $t = -5$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$2t + 7 = 2(-5) + 7 = -10 + 7 = -3$$

مثـــــال (4)

أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة:

$$4x - 5 = 6x + 7$$

الحل

لحل هذه المعادلة يتم نقل الثوابت في أحد طرفي المعادلة والمجهول في الطرف الآخر للمعادلة أي يتم نقل -5 إلى الطرف الأيمن وبعكس الإشارة، ونقل $6x$ إلى الطرف الأيسر وبعكس الإشارة، فنحصل على:

$$4x - 6x = 7 + 5$$

وبتجميع الحدود المتشابهة نجد أن:

$$-2x = 12$$

وبقسمة الطرفين على معامل x وهو -2 نحصل على:

$$x = \frac{12}{-2} = -6$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بقيمة $x = -6$ في المعادلة المعطاة نجد أن الطرف الأيسر:

$$4x - 5 = 4(-6) - 5 = -29$$

والطرف الأيمن:

$$6x + 7 = 6(-6) + 7 = -29$$

أي أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر.

مثـــــال (5)

حل المعادلة:

$$-6(3 - x) = -36$$

الحل

بقسمة طرفي المعادلة على -6 نحصل على:

$$(3 - x) = 6$$

ثم يتم نقل 3 إلى الطرف الآخر وبإشارة معاكسة، فنحصل على:

$$-x = 6 - 3$$

أي أن:

$$x = -3$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بقيمة $x = -3$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\begin{aligned} -6(3 - x) &= -6\big(3 - (-3)\big) \\ &= -6(3 + 3) \\ &= -6 \times 6 \\ &= -36 \end{aligned}$$

مثـــال (6)

أوجد حل المعادلة:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{1}{3}$$

الحل

هذه المعادلة تمثل معادلة من الدرجة الأولي في صور كسر، ولحل مثل هذه المعادلات نستخدم القاعدة التي تقول إن حاصل ضرب الطرفين يكون مساوياً لحاصل ضرب الوسطين، أي أن:

$$3(x+3)=2(1)$$

وبفك الأقواس نحصل على:

$$3x+9=2$$
$$3x=2-9$$
$$3x=-7$$
$$x=-\frac{7}{3}$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بقيمة $x=-\frac{7}{3}$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\frac{x+3}{2}=\frac{\left(-\frac{7}{3}\right)+3}{2}=\frac{-7+9}{6}$$
$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

مثـــال (7)

أوجد حل المعادلة:

$$\frac{y-1}{3}+\frac{y+4}{2}=0$$

الحل

لحل هذه المعادلة يجب أولاً ايجاد مقام مشترك للكسرين وهو 6 فنحصل على:

$$\frac{2(y-1)}{3\times 2}+\frac{3(y+4)}{2\times 3}=\frac{2(y-1)}{6}+\frac{3(y+4)}{6}=0$$

وبفلك بسط كل كسر نحصل على:

$$\frac{2y-2}{6}+\frac{3y+12}{6}=0$$

والآن نقوم بجمع البسط:

$$\frac{2y-2+3y+12}{6}=\frac{5y+10}{6}=0$$

ومنها ينتج أن:

$$5y+10=0$$
$$5y=-10$$
$$y=-\frac{10}{5}$$
$$y=-2$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بقيمة $y=-2$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\frac{y-1}{3}+\frac{y+4}{2}=$$
$$\frac{-2-1}{3}+\frac{-2+4}{2}=-\frac{3}{3}+\frac{2}{2}$$
$$=-1+1$$
$$=0$$

مثـــال (8)

حل المعادلة:

$$\sqrt{x} = 4$$

الحل

مثل هذه المعادلات تمثل معادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد على صورة جذر ولذلك نقوم بتربيع طرفي المعادلة، فنحصل على:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (4)^2$$

أي أن

$$x = 16$$

للتحقق من الإجابة بالتعويض بقيمة $x = 16$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\sqrt{x} = \sqrt{16} = 4$$

مثـــال (9)

حل المعادلة:

$$\sqrt{x+1} = 4$$

الحل

بتربيع طرفي المعادلة المعطاة نحصل على:

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (4)^2$$

أي أن:

$$x + 1 = 16$$
$$x = 16 - 1$$
$$x = 15$$

للتحقق من الإجابة بالتعويض بقيمة $x = 15$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{15+1} = 4$$

مثـــال (10)

حل المعادلة:

$$\sqrt{2y-1} + 2 = 5$$

الحل

أولاً ننقل 2 إلى الطرف الآخر من المعادلة وبإشارة مخالفة:

$$\sqrt{2y-1} = 5 - 2 = 3$$

بتربيع طرفي المعادلة نحصل على:

$$\left(\sqrt{2y-1}\right)^2 = (3)^2$$

أي أن:

$$2y - 1 = 9$$
$$2y = 10$$
$$y = 5$$

للتحقق من الإجابة بالتعويض بقيمة $y = 5$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\sqrt{2y-1} + 2 = \sqrt{10-1} + 2$$
$$= \sqrt{9} + 2$$
$$= 3 + 2 = 5$$

مثـــال (11)

حل المعادلة الآتية:

$$\sqrt{x^2+9}=5$$

الحل

بتربيع طرفي المعادلة نحصل على:

$$\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2=(5)^2$$

أي أن:

$$x^2+9=25$$
$$x^2=16$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على قيمتين للمتغير x

$$x=\pm 4$$

للتحقق من الإجابة بالتعويض بقيمة $x=\pm 4$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\sqrt{x^2+9}=\sqrt{(\pm 4)^2+9}$$
$$=\sqrt{16+9}$$
$$=\sqrt{25}=5$$

مثـــال (12)

أوجد حل المعادلة:

$$\sqrt[3]{y-2}=3$$

الحل

بتكعيب طرفي المعادلة نحصل على:

$$\left(\sqrt[3]{y-2}\right)^3=(3)^3$$

أي أن:

$$y-2=27$$
$$y=27+2$$
$$y=29$$

للتحقق من الإجابة بالتعويض بقيمة $y=29$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\sqrt[3]{y-2}=\sqrt[3]{29-2}$$
$$=\sqrt[3]{27}$$
$$=3$$

معادلات من الدرجة الأولي في مجهولين

(First Degree Equations in Two Unknowns)

إذا كان لدينا المعادلتين:

$$a_1x + b_1 y = c_1$$

$$a_2x + b_2 y = c_2$$

تمثل هاتين المعادلتين هندسياً بزوج من المستقيمات وعند حل هاتين المعادلتين يجب دراسة الحالات الثلاثة:

(أ) **الحالة الأولى:** إذا كان

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

فإن المعادلتين تمثلان خطان مستقيمان متوازيان أي أنهما لا يتقاطعان وبالتالي فإن المعادلتين ليس لهما حل.

(ب) **الحالة الثانية:** إذا كان

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

فان المعادلتين تمثلان خطان مستقيمان منطبقان وفي هذه الحالة يوجد للمعادلتين عدد لا نهائي من الحلول.

(ج) **الحالة الثالثة:** إذا كان:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

فان المعادلتين تمثلان خطان مستقيمان متقاطعان في نقطة واحدة وفي هذه الحالة يكون للمعادلتين حل جبري وحيد.

وفي حالة وجود حل جبري نستخدم إحدى الطرقتين الآتيتين لإيجاد هذا الحل:

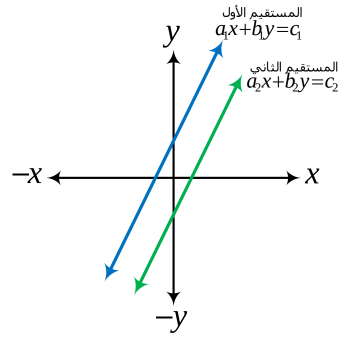
(1) **الطريقة الأولى:** طريقة التعويض حيث يتم استخدام هذه الطريقة على النحو التالي:

- إيجاد قيمة x بدلالة y من إحدى المعادلتين،
- التعويض عن قيمة x من هذه المعادلة،
- نحصل على قيمة y من هذه المعادلة،
- نحصل على قيمة x بالتعويض عن قيمة y.

(2) **الطريقة الثانية:** طريقة الحـذف: حيث يتم استخدام هذه الطريقة على النحو التالي:

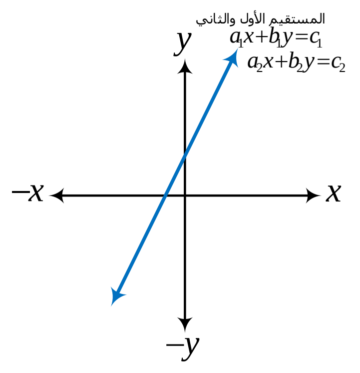
- نجعل معادلات أحد المتغيرين x أو y متساويين ونعكس الإشارة،
- نجمع المعادلتين فنحصل على مجهول واحد منهما،
- نعوض عن هذا المجهول في أحد المعادلتين الأساسيتين فنحصل على المتغير الآخر.

ويمكن برسم كلاً من المستقيمين نستنتج الحالات الثلاث وفي حالة وجود حل يمكن أيضاً استنتاجه من الرسم حيث أن الحل هو عبارة عن نقطة تقاطع المستقيمين. والأمثلة التالية ستوضح لنا كيفية استخدام الطرق السابقة الذكر لإيجاد الحل.



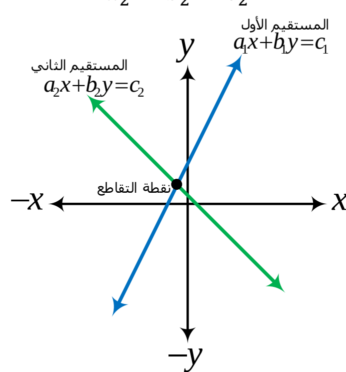
الحالة الأولى المستقيمان متوازيان

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



الحالة الثانية المستقيمان منطبقان

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



الحالة الثالثة المستقيمان متقاطعان

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

مثـــــال (13)

هل المستقيمان:

$$8x + 10y + 6 = 0, \qquad 4x + 5y - 8 = 0$$

متوازيان – متطابقان – متقاطعان، وفي حالة التقاطع أوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

من معادلتي المستقيمان نجد أن:

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 8 \quad \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

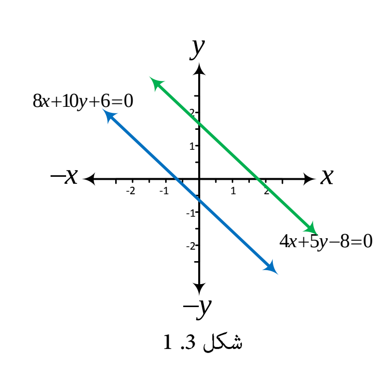
$$b_1 = 5, \quad b_2 = 10 \quad \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = 8, \quad c_2 =- 6 \quad \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

وبالتالي فإن المستقيمان متوازيان أي لا يتقاطعان ولذلك لا يوجد حل للمعادلتين، والشكل 1.3 يوضح ذلك.



شكل 3. 1

مثـــــال (14)

هل المستقيمان:

$$x - y - 1 = 0, \qquad 3x - 3y - 3 = 0$$

متوازيان – متطابقان – متقاطعان، وفي حالة التقاطع أوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

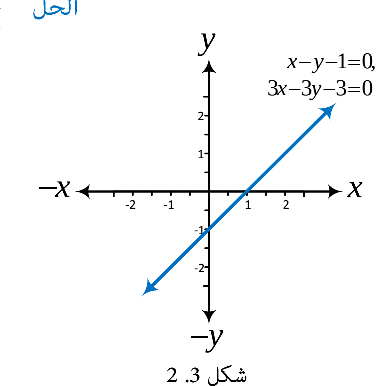
من معادلتي المستقيمان نجد أن:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

وبالتالي فإن المستقيمان منطبقان ولذلك يوجد عدد لا نهائي من الحلول، انظر الشكل 2.3.



شكل 3. 2

مثـــــال (15)

هل المستقيمان:

$$7x + 8y + 7 = 0, \qquad (1)$$
$$5x + 4y - 1 = 0 \qquad (2)$$

متوازيان – متطابقان – متقاطعان، وفي حالة التقاطع أوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

من معادلتي المستقيمان نجد أن:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{7}{5}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{8}{4} = 2, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{1} = -7$$

ومن ذلك نستنتج أن:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

وبالتالي فإن المستقيمان متقطعان في نقطة واحدة، ولإيجاد نقطة التقاطع نجد من المعادلة (1) أن:

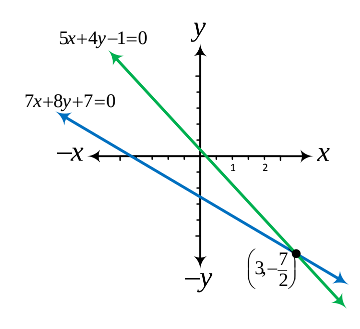
$$7x + 8y + 7 = 0$$

وبتطبيق الطريقة الأولى للحل نوجد x بدلالة y كالتالي:

$$7x = -8y - 7$$
$$x = -\frac{8}{7}y - 1 \qquad (3)$$

وبالتعويض بقيمة x في المعادلة (2) نحصل على:

$$5x + 4y - 1 = 0$$
$$5\left(\frac{-8}{7}y - 1\right) + 4y - 1 = 0$$
$$\frac{-40}{7}y - 5 + 4y - 1 = 0$$
$$-40y - 35 + 28y - 7 = 0$$
$$12y - 42 = 0$$
$$y = -\frac{42}{12} = -\frac{21}{6} = -\frac{7}{2}$$



شكل 3 .3

وللحصول على قيمة x نستخدم المعادلة (3):

$$x = -\frac{8}{7}y - 1$$
$$= -\frac{8}{7}\left(\frac{-7}{2}\right) - 1 = 3$$

وبالتالي فإن نقطة تقاطع المستقيمان هي:

$$(x, y) = \left(3, -\frac{7}{2}\right)$$

للتحقيق من الإجابة: بالتعويض عن قيمة كل من x, y في إحدى المعادلتين نجد أن:

$$5x + 4y - 1 =$$
$$5(3) + 4\left(-\frac{7}{2}\right) - 1 =$$
$$15 - 14 - 1 =$$
$$= 0$$

مثـــال (16)

حل المعادلتين

$$x - 2y - 7 = 0, \qquad (1)$$
$$2x - 3y + 4 = 0 \qquad (2)$$

الحل

أولاً تتأكد من وجود حل للمعادلتين ولذلك نجد أن

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-3}, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{7}{-4}$$

ومن ذلك ينتج أن

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

إذن يوجد حل وحيد للمعادلتين ولإيجاد الحل، من المعادلة (1)

$$x = 2y + 7 \qquad (3)$$

وبالتعويض بقيمة x في المعادلة (2) نحصل على

$$2(2y + 7) - 3y + 4 = 0$$
$$4y + 14 - 3y + 4 = 0$$
$$y + 18 = 0$$
$$y = -18$$

وللحصول على x نستخدم المعادلة رقم(3)

$$x = 2(-18) + 7$$
$$= -36 + 7$$
$$= -29$$

وبالتالي فإن نقطة تقاطع المستقيمان هي:

$$(x, y) = (-29, -18)$$

للتحقيق من الإجابة : بالتعويض عن قيمة كل من x, y في إحدى المعادلتين نجد أن

$$x - 24 - 7 =$$
$$-29 - 2(-18) - 7 =$$
$$-29 + 36 - 7 =$$
$$-36 + 36 = 0$$

مثـــال (17)

أوجد حل المعادلتين

$$-x - 2y = -8, \qquad (1)$$
$$x + 3y = 10 \qquad (2)$$

الحل

أولاً تتأكد من وجود حل للمعادلتين ولذلك نجد أن

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-1}{1} \quad , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{3}$$

أي أن:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

وبالتالي يوجد حل وحيد للمعادلتين ولإيجاد هذا الحل سوف نستخدم الطريقة الثانية (طريقة الحذف) حيث نلاحظ أن معامل x في المعادلة (1) هو نفس معامل x في المعادلة (2) ولكن بإشارة مخالفة ولذلك نقوم بجمع المعادلتين فنحصل على:

$$-2y + 3y = -8 + 10$$
$$y = 2$$

بالتعويض بقيمة y في أحد المعادلتين نجد أن

$$x + 3(2) = 10$$
$$x = 10 - 6$$
$$x = 4$$

أي أن المستقيمان يتقاطعان في النقطة:

$$(4,2)$$

للتحقيق من الإجابة : بالتعويض عن قيمة كل من x, y في إحدى المعادلتين نجد أن

$$-x - 24 = -4 - 2(2)$$
$$= -4 - 4$$
$$= -8$$

مثـــــال (18)

أوجد حل لمعادلتين

$$3x + 2y = 1, \qquad (1)$$
$$7x - 2y = 9 \qquad (2)$$

الحل

أولاً تتأكد من وجود حل للمعادلتين ولذلك نجد أن

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{7} \qquad , \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-2} = -1$$

أي أن:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

لذلك يوجد حل وحيد للمعادلتين، ولإيجاد هذا الحل سنقوم بنفس الخطوات السابقة مع ملاحظة أن معامل y في المعادلتين متساوي وبعكس الإشارة ولذلك نجمع المعادلتين فنحصل على:

$$3x + 7x = 1 + 9$$
$$10x = 10$$
$$x = 1$$

بالتعويض بقيمة x في إحدى المعادلتين نجد أن

$$3(1) + 2y = 1$$
$$2y = 1 - 3$$
$$2y = -2$$
$$y = -1$$

ولذلك فان نقطة تقاطع المستقيمان هي

$$(1, -1)$$

للتحقيق من الإجابة : بالتعويض عن قيمة كل من x, y في إحدى المعادلتين نجد أن:

$$7x - 24 = 7(1) - 2(-1)$$
$$= 7 + 2$$
$$= 9$$

مثـــــال (19)

أوجد قيمة كلاً من x, y

$$2x + 3y = 4, \qquad (1)$$
$$x - 2y = 2 \qquad (2)$$

الحل

أولاً تتأكد من وجود حل للمعادلتين ولذلك نجد أن

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{1} = 2, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{-2}$$

أي أن:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

وبالتالي يوجد حل وحيد، ولإيجاد هذا الحل سنستخدم طريقة الحذف كما تعلمنا في الأمثلة السابقة، وبالنظر الى المعادلتين لن نستطيع الجمع مباشرة لأن معاملات كلاً من المتغيرين غير متساوية ولذلك سنقوم أولاً بضرب المعادلة الثانية $2 \times$ فنحصل على المعادلة (3)

$$2x + 3y = 4, \qquad (1)$$
$$2x - 4y = 4 \qquad (3)$$

وبطرح المعادلتين نحصل على:

$$3y - (-4y) = 4 - (4)$$
$$3y + 4y = 0$$
$$y = 0$$

بالتعويض في المعادلة(1) نجد ان:

$2x + 3(0) = 4$ فان $x = 2$

وبالتالي فإن:

$$(x, y) = (2,0)$$

للتحقيق من الإجابة: بالتعويض عن قيمة كل من x, y في إحدى المعادلتين نجد أن

$$x - 24 = 2 - 2(0)$$
$$= 2$$

مثـــــال (20)

اوجد قيمة كلاً من x, y من المعادلتين

$$4x + y = -5, \qquad (1)$$
$$x + 2y = 4 \qquad (2)$$

الحل

أولاً تتأكد من وجود حل للمعادلتين ولذلك نجد أن

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{4}{1} = 4, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$$

أي أن:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

لذلك يوجد حل وحيد، ولإيجاد الحل سوف نستخدم أيضاً طريقة الحذف، وبالنظر للمعادلتين لحذف y نقوم بضرب المعادلة الأولى $2 \times$ فنحصل على:

$$8x + 2y = -10, \qquad (3)$$
$$x + 2y = 4 \qquad (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (3) نحصل على:

$$8x - x = -10 - 4$$
$$7x = -14$$
$$x = -2$$

بالتعويض بقيمة x في أحد المعادلة(1) نحصل على

$$4(-2) + y = -5$$
$$-8 + y = -5$$
$$y = -5 + 8$$
$$y = 3$$

ولذلك فإن:

$$(x, y) = (-2,3)$$

للتحقيق من الإجابة : بالتعويض عن قيمة كل من x, y في أحدى المعادلتين نجد أن

$$x + 2y = -2 + 2(3)$$
$$= -2 + 6$$
$$= 4$$

الاختبار الذاتي (11)

Self-Test (11)

1. اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) حل المعادلة $2x + 7 = 1$ هو $x =$

a. 5 b. -3 c. 4

(ب) حل المعادلة $2x - 1 = 3x - 3$ هو $x =$

a. 2 b. 7 c. -3

(ج) إذا كانت $x + y = -4$ ، $x - y = 2$ فان قيم x, y هي:

a. $x = -1, y = 3$ b. $x = 1, y = -3$ c. $x =$ -1$, y = -3$

(د) إذا كانت $3x - 4y = 3$ ، $x + y = 1$ فان قيم x, y هي

a. $x = 1, y = 0$ b. $x = 1, y = -3$ c. $x = 0, y = -1$

(هـ) إذا كانت $3x + y = 3$ ، $5x - y = 13$ فان قيم x, y هي:

a. $x = -2, y = 3$ b. $x = 2, y = -3$ c. $x = -2, y = -3$

(و) إذا كان $\sqrt{x + 3} = 2$ فان قيم x هي:

a. $x = 1$ b. $x = -1$ c. $x = 7$

(ز) إذا كان $\frac{2x-1}{4} + \frac{1}{3} = 0$ فان x هي

a. $x = \frac{1}{6}$ b. $x = 6$ c. $x = \frac{-1}{6}$

تمـــــارين
Exercises

1. أوجد حل المعادلات الأتية:

a. $7x + 35 = 0$

b. $-3t + 21 = 0$

c. $3t + 5 = 14$

d. $3x - 7 = 2x + 1$

e. $-5(2 - y) = 15$

f. $\frac{x-1}{3} = \frac{1}{2}$

g. $\sqrt{x} = 5$

h. $\sqrt{x+1} = 3$

i. $\sqrt[3]{x-1} = 3$

j. $\sqrt{2x+3} = 4$

2. اوجد x, y من كل مما يأتي:

a. $x + 2y = 8$
$-x - 3y = -13$

b. $3x + 3y + 7 = 0$
$4x + 6y + 9 = 0$

c. $3x + y - 3 = 0$
$5x - y - 13 = 0$

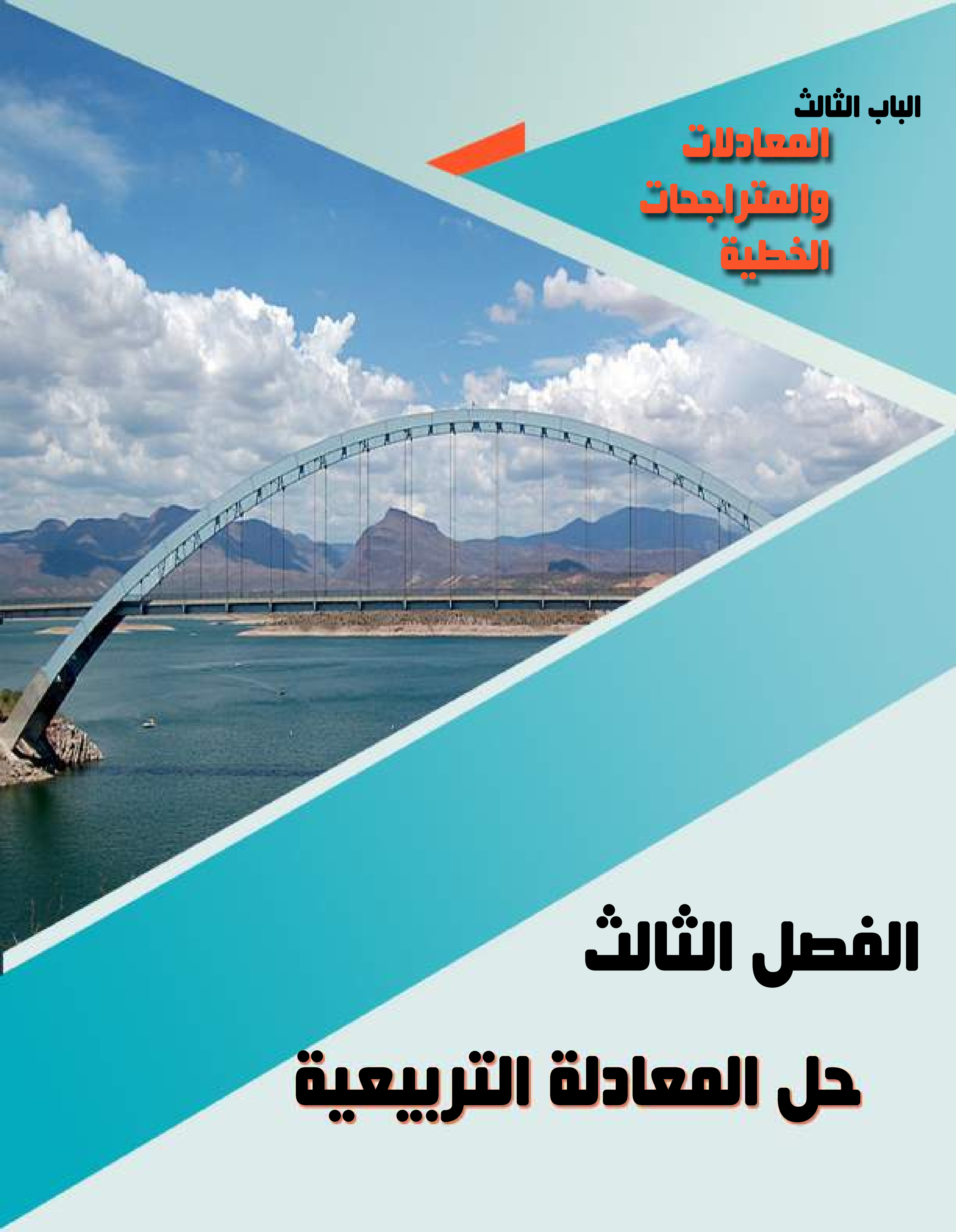
d. $2x + 5y = -21$
$7x - 3y = -12$

e. $3x + 4y = 11$
$4x + 3y = 3$

f. $3x + 4y + 7 = 20$
$-2x + 3y = -13$

g. $3x + 2y = 3$
$2x - 4y = 2$

h. $x - 10y = -2$
$x - 4y = 1$


الباب الثالث
المعادلات
والمتراجحات
الخطية
الفصل الثالث
حل المعادلة التربيعية

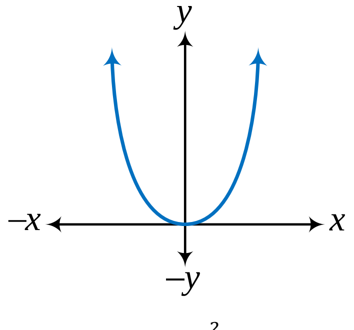
الفصل الثالث : حل المعادلة التربيعية

محتويات الفصل

الفصل الثالث: حل المعادلة التربيعية

Section (3): Solving Quadratic Equations

المعادلة التربيعية
(Quadratic Equation)



$y = ax^2$

شكل 4. 1

الصورة العامة للمعادلة التربيعية في مجهول واحد هي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث يمثل x المجهول أو المتغير في المعادلة، وكل من a, b, c ثوابت أو معاملات وهي اعداد حقيقية بشرط أن $a \neq 0$ وحل هذه المعادلة يعني إيجاد قيمة x التي تحقق تساوى طرفي المعادلة، وحيث أن متغير المعادلة من الدرجة الثانية، يوجد لدينا حلان يحققان المعادلة سنفرضهما x_1, x_2. ويعطى الحل العام لهذه المعادلة بالعلاقة:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويطلق على x_1, x_2 جذري المعادلة. يتم إيجاد حلول (أو جذور) المعادلة التربيعية باستعمال عدة طرق: منها طريقة إكمال المربع أو عن طريق العلاقة بين المعاملات والجذور أو بشكل مباشر باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية أو عن طريق الرسم البياني.

علاقة المعاملات بالجذور
(Relation between Coefficients and Roots)

إذا كان x_1, x_2 هما جذري المعادلة التربيعية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

فإن العلاقة بين معاملات المعادلة وجذورها تكون كالتالي:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

أي أن حاصل جمع الجذرين يساوي سالب معامل x مقسوماً على معامل x^2، وحاصل ضرب الجذرين يساوي الحد المطلق مقسوماً على معامل x^2.



الخيام

هو غياث الدين أبو الفتح عمر بن إبراهيم النيسابوري وشهرته (عمر الخيام أو الخيامي) ، و كنيته هذه نسبة إلي أن والده كان صانع خيام و ولد في مدينة نيسابور (إيران) بين عامي (430 ـ 440هـ) الموافق (1038 ـ 1048م) ، ولقد لازم عمر الخيام العالم الرياضي (نظام الملك) ولقد اشتهر الخيام في الغرب عندما قام العالم (فيتز جيرالد) بنقل رباعيته إلى اللغة الإنجليزية وتوفي سنة (515ـ517هـ) الموافق (1121ـ1123م).

أهم مؤلفاته:

رسالة في براهين الجبر والمقابلة، كتاب مشكلات الحساب، كتاب البرهان عن طريق استخراج أضلاع المربعات والمكعبات، كتاب ضبط القواعد في تخريج المربعات و الجذور التربيعية.

المميز
(Discriminant)

باعتبار المعادلة التربيعية على الصورة:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث كلاً من a, b, c أعداداً حقيقة $a \neq 0$ ، مميز المعادلة التربيعية هو العدد Δ الذي يعطى بالعلاقة:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

تحسب قيمة جذور المعادلة استناداً إلى قيمة المميز، لدينا ثلاثة احتمالات لقيمة المميز:

- **إذا كان $(\Delta > 0)$، فالمعادلة لها حلان حقيقيان مختلفان:**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- **إذا كان $(\Delta = 0)$، فالمعادلة لها حل حقيقي واحد مكرر:**

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- **إذا كان $(\Delta < 0)$فالمعادلة ليس لها حلول حقيقة.**

طريقة إكمال المربع
(Completing Square Method)

طريقة إكمال المربع هي احدى الطرق المستخدمة لحل المعادلة التربيعية حيث يتم في هذه الطريقة تبسيط المعادلة التربيعية وتحويلها إلى الشكل:

$$x^2 + 2hx + h^2 = (x + h)^2$$

ويتم ذلك بإضافة عدد ثابت ذو قيمة مناسبة إلى كلا الطرفين لجعل الطرف الأيسر يظهر في شكل مربع كامل.
ويتم تطبيق هذه الطريقة حسب الخطوات التالية: نعتبر معادلة تربيعية من الشكل

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- يتم قسمة جميع معاملات الأطراف على a بما أن حيث أن $a \neq 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

- ننقل المعامل الثابت $\frac{c}{a}$ إلى الجانب الآخر للمعادلة (الجانب الأيمن).

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

- نضيف عدداً يساوي $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ إلى الطرفين وهذا يجعل الطرف الأيسر يبدو في شكل مربع كامل.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- نكتب الطرف الأيسر على الشكل التربيعي ونبسط الطرف الأيمن إن أمكن.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

- نشكل معادلتين خطيتين بمساواة الجذر التربيعي للطرف الأيسر بالجذر التربيعي الموجب والسالب للطرف الأيمن.

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- نحل المعادلين الخطتين المشكلتين.

نلاحظ أن النتيجة النهائية ما هي إلا القانون أو الصيغة العامة لحل المعادلة التربيعية وهذا بمثابة برهان للقانون.

المقدار في الطرف الأيمن: نلاحظ أن المقام المشترك هو $(2a)^2$ ولذلك فإن:

$$=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$=\frac{-4ac+b^2}{(2a)^2}$$
$$=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$

وبأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة ينتج القانون العام لح المعادلة التربيعية.

حل المعادلة التربيعية بيانياً

جميع المعادلات التي على الشكل:

$$y=f(x)=ax^2+bx+c=0$$

- تسمى دوال تربيعية (سنتحدث في فصل لاحق عن الدوال بشكل مفصل) وجميع الدوال التربيعية لها شكل عام متشابه يسمى القطع المكافىء، موقع وحجم المقطع يعتمد على قيمة كل من a, b, c.
- إذا كان $a<0$ فإن القطع تكون له قيمة عظمى كبرى وشكله يكون منفتحا نحو الأسفل، أما إذا كان $a>0$ فإن القطع تكون له قيمة عظمى صغرى وشكله يكون منفتحاً نحو الأعلى.
- حلول الدالة التربيعية هي نقاط تلاقي منحنى الدالة مع محور x.

ولحل المعادلة التربيعية نقوم برسمها كدالة، ونحصل على نقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور x (في حالة وجود حل حقيقي راجع تعريف المميز).

وكمثال الشكل 2.4 يمثل دالة تربيعية معادلتها هي:

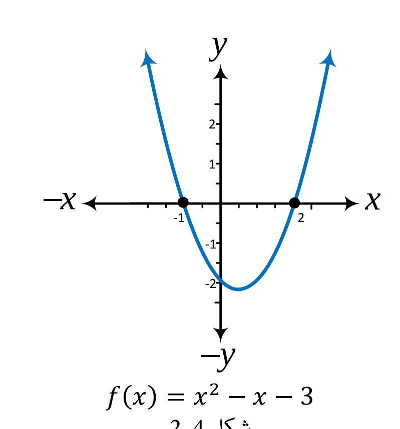
$$f(x)=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

يتقاطع منحناها مع محور x في نقطتين هما $x=-1$ ،$x=2$ حيث تمثل هاتان النقطتان حلي المعادلة التربيعية:

$$x^2-x-2=0$$

أي أن جذري المعادلة (حل المعادلة) هما:

$$x_1,x_2=-1,2$$



$f(x)=x^2-x-3$
شكل 2.4

مثـــــال (1)

حل المعادلة التربيعية

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

الحل

الطريقة الأولى: باستخدام طريقة اكمال المربع:

معامل x^2 يساوي الواحد الصحيح $a = 1$ ولذلك سنكتب المعادلة التربيعية على الصورة:

$$x^2 + 4x = 5$$

نحسب قيمة $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ فنجد أن:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{4}{2 \times 1}\right)^2 = 4$$

بإضافة العدد 4 إلى طرفي المعادلة نجد أن:

$$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4 = 9$$

الطرف الأيمن للمعادلة عبارة عن $(3)^2$ والطرف الأيسر للمعادلة عبارة عن مقدار يمكن تحليله كمربع كامل:

$$(x + 2)^2 = 3^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على:

$$x + 2 = \pm 3$$

أي أن جذري المعادلة هما:

$$x_1 = 3 - 2 = 1, \qquad x_2 = -3 - 2 = -5$$

الطريقة الثانية باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

بمقارنة معاملات المعادلة المعطاة بالصورة العامة للمعادلة التربيعية نجد أن:

$$a_1 = 1\,, \qquad b = 4\,, \qquad c = -5$$

أولاً نحسب المميز

$$b^2 - 4ac = 16 - 4(-5)$$
$$= 16 + 20 = 36 > 0$$

لذلك فإن المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان وباستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية نجد أن:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

وهي نفس نتيجة الطريقة الأولى، ونلاحظ أن مجموع الجذرين:

$$x_1 + x_2 = 1 - 5 = -4 = -\frac{b}{a}$$

وحاصل ضرب الجذرين:

$$x_1 x_2 = (1)(-5) = \frac{c}{a}$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بقيمة الجذر الأول $x = 1$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$x^2 + 4x - 5$$
$$= (1)^2 + 4(1) - 5$$
$$= 1 + 4 - 5$$
$$= 0$$

وبالتعويض بالجذر الثاني $x = -5$ نجد أن:

$$x^2 + 4x - 5$$
$$= (-5)^2 + 4(-5) - 5$$
$$= 25 - 20 - 5$$
$$= 0$$

مثـــــال (2)

حل المعادلة التربيعية

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

الحل

$$a = 3\ , \qquad b = -7\ , \qquad c = 2$$

المميز:

$$b^2 - 4ac = 49 - 4(3)(2) = 49 - 24 = 25 > 0$$

لذلك فإن المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان هما:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{+7 + \sqrt{25}}{6} = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-7 - \sqrt{25}}{6} = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أن:

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = (2)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = \frac{c}{a}$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بقيمة الجذر الأول $x = 2$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$3x^2 - 7x + 2$$

$$= 3(2)^2 - 7(2) + 2$$
$$= 12 - 14 + 2$$
$$= 0$$

وبالتعويض بالجذر الثاني $x = \frac{1}{3}$ نجد أن:

$$3x^2 - 7x + 2$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{3}\right) + 2$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 2 = -\frac{6}{3} + 2$$
$$= 0$$

مثـــــال (3)

حل المعادلة:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

الحل

نلاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة عبارة عن مقدار مربع كامل وبالتالي يمكن الحصول على الجذور مباشرة:

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$$

أي أن الجذران هما:

$$x_1 = x_2 = 2$$

بطريقة أخرى، بمقارنة معاملات المعادلة المعطاة بالصورة العامة للمعادلة التربيعية نجد أن:

$$a = 1\ , \qquad b = -4\ , \qquad c = 4$$

المميز

$$b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$$

فان المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان هما

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

وهي نفس النتيجة السابقة.

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بقيمة أحد الجذرين $x = 2$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$x^2 - 4x + 4$$

$$= (2)^2 - 4(2) + 4$$
$$= 4 - 8 + 4$$
$$= 0$$

مثـــال (4)

أوجد جذور المعادلة:

$$x^2 - 3x + 5 = 0$$

الحل

$$a = 1\,, \qquad b = -3\,, \qquad c = 5$$

المميز

$$b^2 - 4ac = 9 - (4)(5) = 9 - 20 = -11 < 0$$

ظهر لنا هنا أن قيمة المميز أقل من الصفر وبالتالي لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

مثـــال (5)

حل المعادلة التربيعية:

$$x^2 - 5x = 0$$

الحل

يمكن حل هذه المعادلة باعتبارها مقدار ثلاثي يمكن تحليله على النحو التالي:

$$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$$

وبالتالي فإن جذوزها هي:

$$x_1, x_2 = 0{,}5$$

ملحوظة (1)
يمكن استخدام طرق تحليل المقدار الثلاثي لحل المعادلات بدون استخدام القانون العام لإيجاد الجذور كما سبق دراسته في الباب السابق.

مثـــال (6)

أوجد جذور المعادلة:

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

الحل

باعتبار المعادلة مقدار ثلاثي يمكن تحليله على الحو التالي:

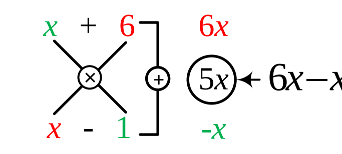
$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1) = 0$$

ولذلك فإن:

$$x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -6$$
$$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

ومن ذلك ينتج أن الجذران هما:

$$x = 1\ \ , x = -6$$



للتحقق من الإجابة: نلاحظ أن الجذر الأول 1 يحقق المعادلة وبالتعويض بالجذر الآخر $x = -6$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x - 6 &\\ &= (-6)^2 + 5(-6) - 6 \\ &= 36 - 30 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

مثـــال (7)

حل المعادلة:

$$x^2 - 9 = 0$$

الحل

سبق وأن درسنا هذا الشكل من المقادير الثلاثية وهو عبارة عن فرق بين مربعين وبالتالي فإن:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3) = 0$$

ولذلك فإن الحلان هما:

$$x = -3 \ , \qquad x = 3$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بقيمة أي من الجذرين في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= (\pm 3)^2 - 9 \\ &= 9 - 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

مثـــال (8)

أوجد جذور المعادلة:

$$8x^2 + 2x - 3 = 0$$

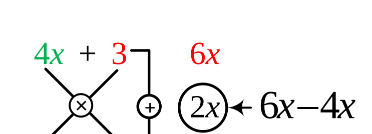
الحل

باستخدام طريقة التحليل نجد أن:

$$(4x+3)(2x-1) = 0$$

$$4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{3}{4}$$

$$2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$



وبالتالي فإن جذرا المعادلة هما:

$$x_1, x_2 = -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$$

مثـــال (9)

حل المعادلة الآتية:

$$\frac{x+2}{2x} = \frac{x-4}{3}$$

الحل

أولاً نضع المعادلة الكسرية على صورة كثيرة حدود وحيث أن حاصل ضرب الطرفين يساوى حاصل ضرب الوسطين فإن:

$$\begin{aligned} 3(x+2) &= 2x(x-4) \\ 3x + 6 &= 2x^2 - 8x \\ 2x^2 - 11x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

حصلنا على كثيرة حدود من الدرجة الثانية أو كما درسنا لدينا مقدار ثلاثي يمكن تحليله على الصورة:

$$(2x+1)(x-6) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 6$$

إذا الحلان

$$x = 6 \ , \qquad x = -\frac{1}{2}$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بأحد الجذرين $x = -\frac{1}{2}$ في المعادلة المعطاة نجد أن الطرف الأيسر:

$$\frac{x+2}{2x} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1+4}{-2}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

والطرف الأيمن:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)-4}{3} = \frac{-1-8}{6}$$

$$= -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

أي أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن.

مثـــــال (10)

أوجد حل المعادلة:

$$\frac{x-1}{2}-\frac{3}{x}=0$$

الحل

أولاً يجب وضع المعادلة على صورة مقدار يقل التحليل ولذلك نجد أن:

$$\frac{x-1}{2}-\frac{3}{x}=0 \Longrightarrow \quad \frac{x-1}{2}=\frac{3}{x}=0$$

وحيث أن حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين فإن:

$$x^2-x=6 \Longrightarrow x^2-x-6=0$$

وبالتالي حصلنا على مقدار ثلاثي يمكن تحليله وينتج لدينا:

$$(x-3)(x+2)=0$$
$$x-3=0 \Longrightarrow x=3$$
$$x+2=0 \Longrightarrow x=-2$$

إذا الحلان هما

$$x=-2\ , \qquad x=3$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بأحد الحلين وليكن $x=3$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\frac{x-1}{2}-\frac{3}{x}=\frac{3-1}{2}-\frac{3}{3}$$
$$=1-1=0$$

وبالتعويض بالحل الآخر $x=-2$ نجد أن:

$$\frac{x-1}{2}-\frac{3}{x}=\frac{-2-1}{2}-\frac{3}{-2}$$
$$=-\frac{3}{6}+\frac{3}{2}=0$$

أي أن كلا الحلين يحقق المعادلة المعطاة.

مثـــــال (11)

حل المعادلة

$$\frac{-2x}{3}-\frac{x^2-5}{6}=0$$

الحل

لدينا هنا كسرين فيجب أولاً إيجاد مقام مشترك وذلك عن طريق الضرب $\times 6$

$$6\left(\frac{-2x}{3}\right)-6\left(\frac{x^2-5}{6}\right)=0$$
$$-4x-(x^2-5)=0 \Longrightarrow x^2+4x-5=0$$

حصلنا على معادلة تربيعية أو مقدار ثلاثي يمكن تحليله مباشرة على الشكل:

$$(x+5)(x-1)=0$$
$$x+5=0 \Longrightarrow x=-5$$
$$x-1=0 \Longrightarrow x=1$$

إذن حلا المعادلة هما:

$$x=-5\ , \qquad x=1$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بأحد الحلين وليكن $x=1$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$\frac{-2x}{3}-\frac{x^2-5}{6}=\frac{-2}{3}-\frac{1-5}{6}$$
$$=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$$

وبالتعويض بالحل الآخر $x=-5$ نجد أن:

$$\frac{-2x}{3}-\frac{x^2-5}{6}$$
$$=\frac{-2(-5)}{3}-\frac{(-5)^2-5}{6}$$
$$=\frac{10}{3}-\frac{20}{6}=\frac{10}{3}-\frac{10}{3}=0$$

أي أن كلا الحلين يحقق المعادلة المعطاة.

مثـــــال (12)

حل المعادلة

$$\sqrt{x+3}=x-3$$

الحل

يطلق على مثل هذه النوعية من المعادلات "معادلات من الدرجة الثانية في صورة جذر أو معادلات جذرية" ولحلها يجب وضع الجذر في جهة وباقي الحدود في الجهة الأخرى من علامة $=$ ثم نجري عملية تربيع للطرفين، وبتطبيق هذه الخطوات على مثالنا نجد أن:

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x-3)^2$$
$$x+3 = x^2-6x+9$$
$$x^2-7x+6=0$$

حصلنا في النهاية على مقدار ثلاثي قابل للتحليل على النحو التالي:

$$(x-6)(x-1)=0$$

ولذلك فإن قيم x التي تحقق المعادلة الجذرية هي:

$$x-6=0 \Longrightarrow x=6$$

$$x-1=0 \Longrightarrow x=1$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بأحد الحلين وليكن $x = 1$ في المعادلة المعطاة نجد أن الطرف الأيسر:

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{1+3} = \pm 2$$

والطرف الأيمن:

$$(x-3) = (1-3) = -2$$

وباعتبار القيمة السالبة للطرف الأيسر فإن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن. وعند التعويض بالحل الثاني نجد أن الطرف الأيسر:

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{6+3} = \pm 3$$

أما الطرف الأيمن:

$$x-3 = 6-3 = 3$$

وباعتبار القيمة الموجبة للطرف الأيسر فإن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن.

مثـــــال (13)

حل المعادلة

$$\sqrt[3]{x^2-2x} = 2$$

الحل

هذه المعادلة أيضاً معادلة جذرية وحيث أن الجذر في طرف والطرف الثاني خالي من الجذر يمكن بشكل مباشر تكعيب الطرفين، فنحصل على:

$$x^2-2x = (2)^3 = 8$$
$$x^2-2x-8=0$$
$$(x-4)(x+2)=0$$

وبالتالي حصلنا على معادلة تربيعية أو مقدار ثلاثي يمكن تحليله على الصورة:

$$x-4=0 \Longrightarrow x=4$$

$$x+2=2 \Longrightarrow x=-2$$

إذن حل المعادلة هما

$$x=-2\,, x=4$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بأحد الحلين وليكن $x = 1$ في المعادلة المعطاة نجد أن الطرف الأيسر:

$$\sqrt[3]{(-2)^2-2(-2)} = \sqrt[3]{4+4}$$
$$= \sqrt[3]{8} = 2$$

يساوي الطرف الأيمن. وعند التعويض بالحل الثاني $x = 4$ نجد أن الطرف الأيسر

$$\sqrt[3]{(4)^2-2(4)} = \sqrt[3]{16-8}$$
$$= \sqrt[3]{8} = 2$$

أيضاً يساوي الطرف الأيمن.

مثـــــال (14)

اوجد حل المعادلة الاتية:

$$x^2+x-1=0$$

الحل

بالنظر إلى هذا المثال نجد أنه لا يمكن تحليله بالطرق العادية ولذلك سنعود مرة أخرى للقانون المذكور في بداية الفصل، نتأكد أولاً هل يوجد حل حقيقي أم لا يوجد وذلك عن طريق المميز حيث:

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = -1$$

المميز:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-1) = 1+4 = 5 > 0$$

وبالتالي يكون لدينا حلان (جذران) حقيقيان ومختلفان نوجدهما باستخدام القانون:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض بأحد الحلين وليكن $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$x^2 + x - 1$$

$$= \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{4} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} + \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4} - 1$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{5} - 2 + 2\sqrt{5}}{4} - 1$$

$$= \frac{4}{4} - 1 = 0$$

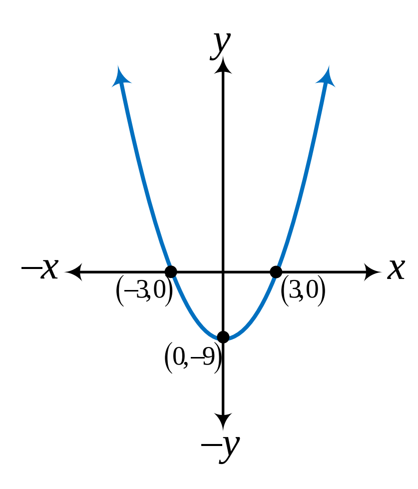
حاول بنفسك أن تتحقق من الحل الثاني.

مثـــــال (15)

حل المعادلة: $x^2 - 9 = 0$ بيانياً.

الحل

نرسم الدالة أولا شكل 3.4.



شكل 3 .4

بما أن

$$y = x^2 - 9$$

فان المنحنى (قطع مكافئ) يقطع محور x في نقطتين هما $(-3,0), (3,0)$، ويقطع محور y في النقطة $(0,-9)$ وهي رأس المنحنى أو القطع ومن ذلك نجد أن حل المعادلة التربيعية عبارة عن نقط التقاطع مع محور x ولذلك فإن الحلان هما:

$$x_1, x_2 = 3, -3$$

للتحقق من الإجابة جبرياً: بالتعويض بأحد الحلين وليكن $x = 3$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$x^2 - 9 = (3)^2 - 9$$

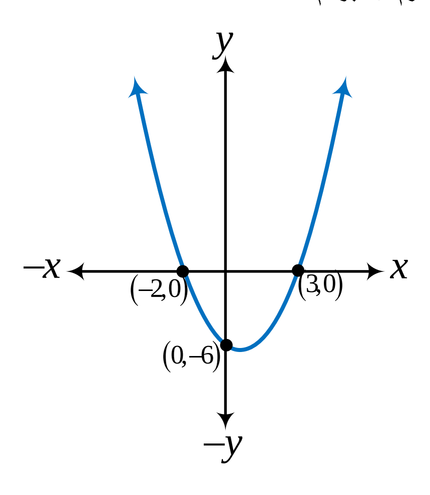
$$= 9 - 9 = 0$$

مثـــــال (16)

حل المعادلة: $x^2 - x - 6 = 0$ بيانياً.

الحل

لحل المعادلة المعطاة بيانياً نقوم أولا برسم الدالة شكل 4.4



شكل 4 .4

ومن منحنى الدالة نجد أن المنحنى يقطع محور x في نقطتين هما $(3,0), (-2,0)$ الاحداثي x يعبر عن حل المعادلة ويقطع محور y في النقطة $(0, -6)$ وهي تمثل رأس القطع. ومن ذلك نجد أن حل المعادلة التربيعية عبارة عن نقط التقاطع مع محور x ولذلك فإن الحلان هما:

$$x_1, x_2 = 3, -2$$

للتحقق من الإجابة جبرياً: بالتعويض بأحد الحلين وليكن $x = 3$ في المعادلة المعطاة نجد أن:

$$x^2 - x - 6 = (3)^2 - 3 - 6$$
$$= 9 - 9 = 0$$

مثـــــال (17)

أوجد قيمة b التي تجعل الواحد الصحيح جذراً من جذور المعادلة:

$$x^2 - bx + 7 = 0$$

ثم أوجد الجذر الآخر.

من معطيات المثال أن 1 أحد جذور المعادلة أي يحقق المعادلة وبالتالي بالتعويض عن قيمة $x = 1$ في المعادلة نحصل على:

$$(1)^2 - b(1) + 7 = 0$$

حصلنا على معادلة خطية في b وبالفك والاختصار نجد أن:

$$b = 1 + 7 = 8$$

وبالتالي فإن المعادلة تصبح:

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

ويمكن تحليلها كمقدار ثلاثي أو بأي طريقة أخرى مما سبق شرحه لنحصل على:

$$(x - 1)(x - 7) = 0$$

وبالتالي فإن الجذر الآخر المطلوب هو

$$x = 7$$

للتحقق من الإجابة: بالتعويض عن $x = 7$ في المعادلة المستنتجة نجد أن:

$$x^2 - 8x + 7 = (7)^2 - 8(7) + 7$$
$$= 49 - 56 + 7$$
$$= 56 - 56 = 0$$

الاختبار الذاتي (12)

Self-Test (12)

اختر الإجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد هي $ax^2 + bx + c = 0$

a. صواب   b. خطأ

(ب) المميز يعرف على انه يساوى $b^2 - 4ac$

a. صواب   b. خطأ

(ج) إذا كانت $b^2 - 4ac > 0$ فان للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

a. صواب   b. خطأ

(د) إذا كانت $x^2 + 2x - 3 = 0$ فإن قيم x هي:

a. $(1,3)$ b. $(3,-1)$ c. $(-3,1)$

(هـ) إذا كان $\frac{5x-6}{3} = \frac{x^2}{3}$ فإن قيم x هي:

a. $(2,3)$ b. $(2,-3)$ c. $(-2,-3)$

(و) إذا كانت $\sqrt{x+5} = x + 3$ فإن قيم x هي:

a. $1,4$ b. $(-1,-4)$ c. $(1,-4)$

(ز) إذا كانت $b = c = 0$ من الصورة العامة فإن قيم x هي

a. 0 b. 1 c. -1

(ح) اذا كانت $x^2 + 8x = 0$ فإن قيم x هي:

a. $(0,8)$ b. $(1,-8)$ c. $(0,-8)$

تمـــــارين
Exercises

أوجد حل المعادلات الآتية:

(1) $x^2 + 3x + 2 = 0$

(2) $x^2 - 2x - 3 = 0$

(3) $x^2 - 2x + 1 = 0$

(4) $-6x - x^2 = 0$

(5) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

(6) $x^2 + 3x - 10 = 0$

(7) $x^2 + x - 12 = 0$

(8) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{4}{x}$

(9) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x^2+x}{3} = 0$

(10) $\sqrt{2x-9} = x - 4$

(11) $\sqrt{x^3 - 3x} = 2$

(12) $x(x+4) = 5$

(13) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(14) $2x^2 + 11x - 21 = 0$

(15) $3x^2 + 5x - 1 = 0$

(16) $x^2 + 2x = 0$

(17) $x^2 - 4 = 0$

(18) $x^2 + 6x + 9 = 0$

(19) $x^2 - x - 20 = 0$

(20) $3(x^2 - x) = 8x + 4$

(21) $x(x+1) + 1 = -2$

(22) $x^2 - 40 = 9$

(23) $\sqrt{x+5} = (x-1)$

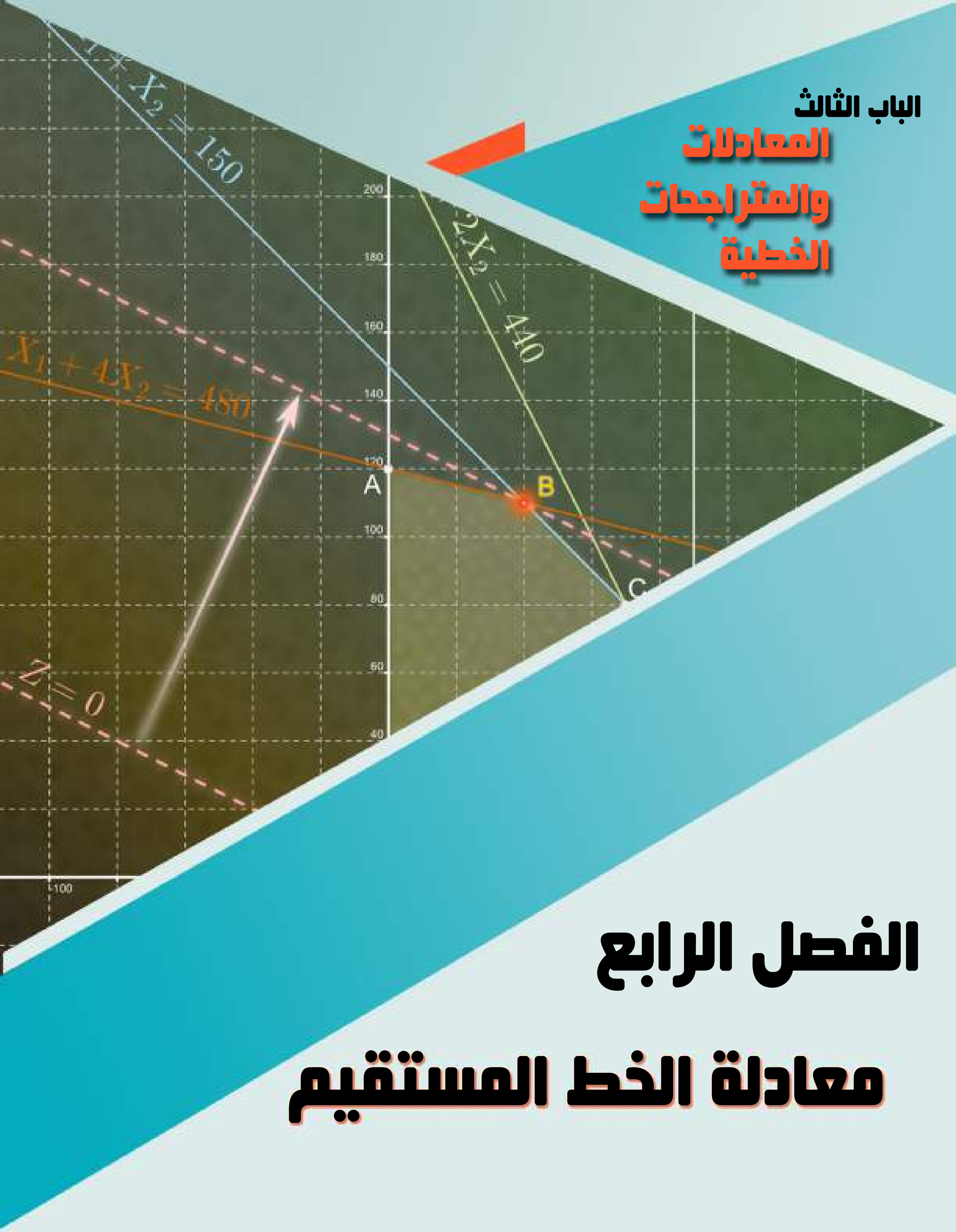
(24) $x(3x-7) = -1$

(25) $x^2 - 10x = 25$

(26) $2x^2 + 6x = 0$

(27) $x^2 + 9 = 7x - 1$

(28) $x^2 + 9x - 20 = 0$



الباب الثالث
المعادلات والمتراجحات الخطية
الفصل الرابع
معادلة الخط المستقيم
X1 + 4X2 = 480
Z = 0
A
B
C
200
180
160
140
120
100
80
60
40
-100

الفصل الرابع : معادلة الخط المستقيم

محتويات الفصل

الفصل الرابع: معادلة الخط المستقيم
Section (4): Straight Line Equation

الخط المستقيم
(Straight Line)

يمر أي خط مستقيم مرسوم في مستوى الاحداثيات بعدد لا حصر له من النقاط، ومع ذلك يكفي أن نعلم فقط إحداثيات نقطتين تقعان عليه لنتمكن من رسمه. فعند رسم القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين ومدها على استقامتها من كلا طرفيها (ليس هناك حدود للامتداد) نحصل على الخط المستقيم المعني.

ولكل خط مستقيم توجد علاقة تربط بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي للنقط الواقعة عليه وتسمى هذه العلاقة باسم معادلة الخط المستقيم والصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي:

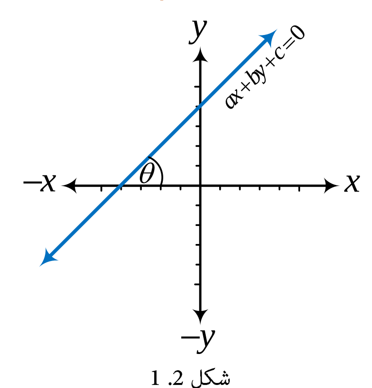
$$ax + by + c = 0$$

لكل $a, b, c \in R$، بشرط أن $a \neq 0$، $b \neq 0$.

وقبل التطرق إلى الأشكال المختلفة لمعادلات الخط المستقيم، يجب أولاً التعرف على ميل الخط المستقيم.

ميل الخط المستقيم
(Slope of Straight Line)

ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية الموجبة θ التي يصنعها هذا الخط مع محور x انظر الشكل 1.2 ويمكن إيجاد ميل الخط المستقيم بأكثر من طريق سنذكر منها طريقتين:



شكل 2. 1

<u>أولاً: ميل الخط المستقيم بمعلومية نقطتين عليه:</u>

إذا مر الخط المستقيم بنقطتين (x_1, y_1)، (x_2, y_2) فإن ميل هذا الخط والذي نرمز له بالرمز m يمكن ايجاده بالعلاقة:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

<u>ثانياً: ميل الخط المستقيم بمعلومية معادلته العامة:</u>

إذا كان لدينا المعادلة العامة للمستقيم والتي على الصورة:

$$ax + by + c = 0$$

فإن ميل هذا الخط m يعطى بالعلاقة:

$$m = -\frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = -\frac{a}{b} \quad , b \neq 0$$


ثابت بن قرة

هو أبو الحسن ثابت بن قرة ولد في حران (تركيا) عام (220هـ ــ 835م)، و قد عمل صرافاً و لكنه حوكم لاعتناقه بعض الآراء و أصبح هائماً حتى قابله (بنو موسى بن شاكر) أثناء عودتهم إلى بغداد ، فلما رأوا معرفته بالعلوم و إلمامه باللغات اليونانية و السريانية و العربية أخذوه معهم إلى بغداد وقدموه إلى الخليفة المعتصم، و قد كان مقامه كبيراً عند المعتصم حيث برع في جميع العلوم ، و قد توفي في بغداد عام (288هـ ــ90 م) وله كثير من الكتب في الجبر و الهندسة.

أهم مؤلفاته :

إيجاد حلول هندسية لبعض المعادلات التكعيبية ، كتاب في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية ، كتاب الكرة والاسطوانة ، كتاب في المسائل الهندسية ، كتاب في المربع و قطره ، كتاب في المخروط.

مثـــــال (1)

احسب ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2,4)$، $(7,-5)$.

الحل

معطى لدينا النقطتان اللتان يمر بهما المستقيم، أي أن:

$$(x_1, y_1) = (-2,4), \qquad (x_2, y_2) = (7,-5)$$

بالتعويض في العلاقة:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-5)-(4)}{(7)-(-2)} = \frac{-9}{9} = -1$$

أي أن ظل الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم مع محور x هو -1 أي أنه يصنع زاوية $135°$ مع محور x.

مثـــــال (2)

أحسب ميل الخط المستقيم الذي معادلته العامة هي:

$$-7x + 8y + 3 = 0$$

الحل

بمقارنة المعادلة المعطاة للمستقيم بالمعادلة العامة نجد أن:

$$a = -7, \qquad b = 8, \qquad c = 3$$

وباستخدام العلاقة:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{(-7)}{8} = \frac{7}{8}$$

ملحوظة (1)

- إذا كان الخط المستقيم أفقياً أي أنه يوازي محور x يكون الميل مساوياً للصفر.
- إذا كان الخط المستقيم رأسياً أي أنه يوازي محور y يكون الميل غير معروف.

مثـــــال (3)

إذا كانت معادلة المستقيم هي:

$$y = \frac{1}{2}x - 5$$

احسب ميل هذا المستقيم وأوجد نقط تقاطعه مع محوري الإحداثيات ثم ارسمه في المحاور الكارتيزية.

يمكن وضع معادلة المستقيم في الصورة العامة لتصبح على الشكل:

$$-\frac{1}{2}x + y + 5 = 0$$

وبالتالي ينتج أن $a = -\frac{1}{2}, b = 1, c = 5$ ومنه نستنتج أن ميل المستقيم

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(1)} = \frac{1}{2}$$

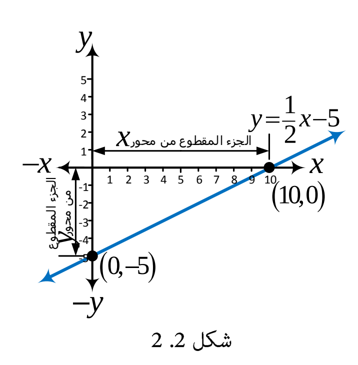
لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور x نضع $y = 0$ في معادلة المستقيم، فنحصل على:

$$0 = \frac{1}{2}x - 5 \Rightarrow x = 10$$

أي أن المستقيم يقطع محور x في النقطة $(10,0)$، ولإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور y نضع $x = 0$ في معادلة المستقيم فنجد أن:

$$y = -5$$

أي أن المستقيم يقطع محور y في النقطة $(0,-5)$. والشكل 2.2 يمثل رسم هذا المستقيم في المحاور الكارتيزية، لاحظ أننا استخدمنا النقطتين $(10,0)$، $(0,-5)$ لرسم هذا المستقيم وهي أسهل طريقة لرسم المستقيم حيث يتم توقيع النقطتين على محاور الاحداثيات ثم يتم التوصيل بينهما للحصول على الخط المستقيم.



شكل 2 .2

الصور المختلفة لمعادلات الخط المستقيم
(Different forms for straight line Equation)

يمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم بأكثر من طريقة سنذكر أهم وأسهل هذه الطرق:

(أ) **معلومية ميل الخط المستقيم ونقطة واقعة عليه:**

إذا كان الخط المستقيم ميله m ومعروف لدينا نقطة واقعة عليه (x_1, y_1) فإن معادلته تكون على الصورة:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(ب) **معلومية نقطتين واقعتين على الخط المستقيم:**

إذا مر الخط المستقيم بالنقطتين (x_1, y_1)، (x_2, y_2) فإن معادلته تكون على الصورة:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

وبالنظر في العلاقة الأخيرة نجد أن نفس المعادلة في الجزء (أ) حيث أن ميل الخط المستقيم ما هو إلا الطرف الأيمن من العلاقة.

(ج) **معلومية ميل الخط المستقيم والجزء المقطوع من محور y:**

إذا كان الخط المستقيم ميله m ويقطع هذا المستقيم محور y في النقطة $(0, c)$ فإن معادلة الخط المستقيم تأخذ الصورة:

$$y = mx + c$$

حيث c هو الجزء المقطوع من محور y، وهذه الصورة هي الصورة العامة للمعادلة الخطية للمستقيم.

(د) **معلومية الجزء المقطوع من محور x والجزء المقطوع من محور y:**

إذا قطع المستقيم محور x في النقطة $(a, 0)$ وقطع محور y في النقطة $(0, b)$ فإن معادلة هذا المستقيم تأخذ الصورة:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

حيث a هو الجزء المقطوع من محور x، b الجزء المقطوع من محور y.

مثـــال (4)

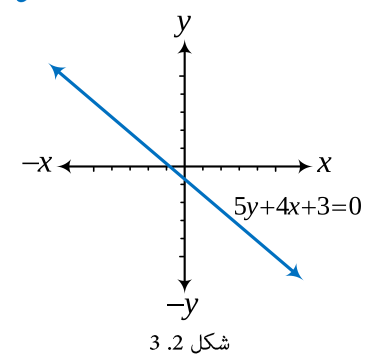
أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2,1)$ وميله $-\frac{4}{5}$.

الحل

بما أن لدينا نقطة معلومة على المستقيم $(x_1,y_1)=(-2,1)$ ومعلوم لدينا أيضاً ميل هذا المستقيم $m=-\frac{4}{5}$ فإن معادلة هذا المستقيم تكون على الصورة:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=-\frac{4}{5}(x-(-2))$$
$$5y-5=-4x-8$$
$$4x+5y+3=0$$

حاول أن ترسم هذا المستقيم لتحصل على الشكل 3.2.



شكل 2. 3

مثـــال (5)

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,8),(2,5)$.

الحل

المعلوم لدينا نقطتين واقعتين على المستقيم ولذلك نستخدم الصورة:

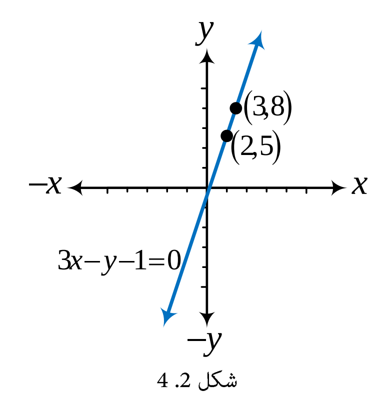
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m$$

وبالتعويض عن $(x_1,y_1)=(2,5)$، $(x_2,y_2)=(3,8)$ في العلاقة السابقة نحصل على:

$$\frac{y-5}{x-2}=\frac{8-5}{3-2}=3$$

وبما أن حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين نحصل على:

$$y-5=3x-6$$
$$3x-y-1=0$$



شكل 2. 4

مثـــال (6)

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2,4),(3,-1)$.

الحل

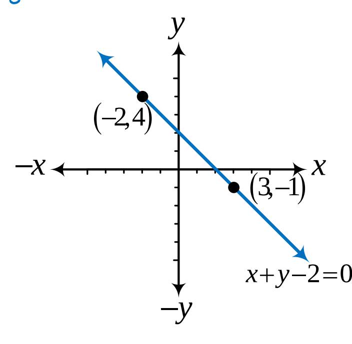
المعلوم لدينا نقطتين واقعتين على المستقيم ولذلك نستخدم الصورة:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m$$

وبالتعويض عن $(x_1,y_1)=(3,-1)$، $(x_2,y_2)=(-2,4)$ في العلاقة السابقة نحصل على:

$$\frac{y+1}{x-3}=\frac{4+1}{-2-3}=\frac{5}{-5}=-1$$

وبما أن حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين نحصل على:



شكل 2. 5

$$y + 1 = -x + 3$$
$$x + y - 2 = 0$$

لاحظ أنه يمكن كتابة معادلة المستقيم بطريقة أخرى:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

حيث أن الميل $m = -1$ ونختار إحدى النقاط المعطاة ولتكن $(3, -1)$ وبالتعويض ينتج أن:

$$y + 1 = -1(x - 3)$$

وبالفك والاختصار سنحصل على نفس المعادلة السابقة:

$$x + y - 2 = 0$$

مثـــــال (7)

اوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بنقطة الاصل وبالنقطة $(-3,5)$.

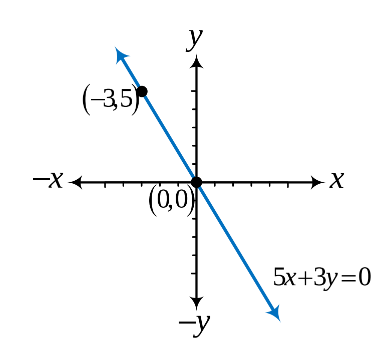
الحل

في هذا المثال لدينا أيضاً نقطتين واقعتين على المستقيم، نقطة الأصل $(0,0)$ والنقطة $(-3,5)$ وبالتعويض في العلاقة:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$
$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{5 - 0}{-3 - 0}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$5x + 3y = 0$$



شكل 2. 6

مثـــــال (8)

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$ ويقطع جزءاً قدره -3 من محور y.

الحل

المعلومات المتوفرة لدينا عن الخط المستقيم هي $m = \frac{1}{2}$ والجزء المقطوع من محور y، وهو $c = -3$ لذلك سنستخدم العلاقة:

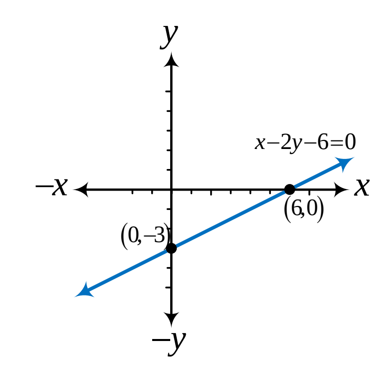
$$y = mx + c$$

وبالتعويض في هذه العلاقة عن m, c من المعطيات، نجد أن:

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

أو يمكن كتابة المعادلة في الصورة العامة للمستقيم على الشكل:

$$x - 2y - 6 = 0$$



شكل 2. 7

مثـــال (9)

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$ ويقطع جزءاً قدره 2 من محور y.

الحل

هذا المثال هو نفس المثال السابق مع اختلاف قيم كلاً من m, c، أي أن:

$$y = mx + c$$

$$y = \frac{1}{3}x + 2$$

وفي الصورة العامة:

$$x - 3y + 6 = 0$$

ملحوظة (2)
من خلال المثالين 8، 9 نجد أنه إذا كانت c موجبة فإن الجزء المقطوع من محور y أعلى نقطة الصفر أي أنه الجزء الموجب وإذا كانت c سالبة فإن الجزء المقطوع من محور y أسفل نقطة الصفر أي أنه الجزء السالب.

مثـــال (10)

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله -5 ويقطع جزءاً قدره 1 من الجزء السالب من محور y.

الحل

في هذا المثال لدينا الميل $m = -5$ والجزء المقطوع من محور y مع ملاحظة أنه مقطوع من الجزء السالب، أي أن $c = -1$ وبالتالي فإننا نستخدم معادلة الخط المستقيم:

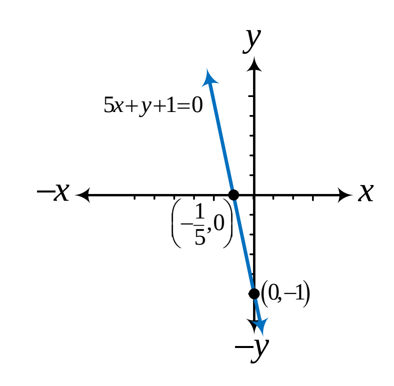
$$y = mx + c$$

وبالتعويض عن $m = -5$، وعن $c = -1$ نجد أن:

$$y = -5x - 1$$

أو في الصورة العامة:

$$5x + y + 1 = 0$$



شكل 2. 8

مثـــال (11)

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع من الجزء الموجب لمحور x جزءاً قدره 3 ويقطع من الجزء السالب لمحور y جزء قدره 2.

الحل

في هذا المثال لدينا كلاً من الجزء المقطوع من محور x ومحور y وبالتالي سنستخدم العلاقة:

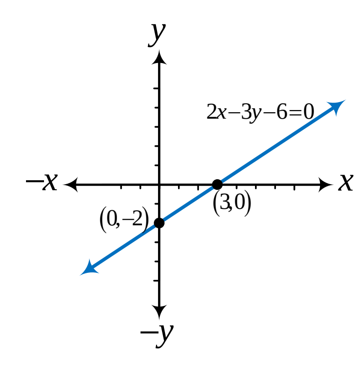
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

وبالتعويض عن $a = 3$ والتي تمثل الجزء المقطوع من محور x، وعن $b = -2$ وهي تمثل الجزء المقطوع من محور y مع ملاحظة إشارة كلاً من a, b نجد أن:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{(-2)} = 1$$

وبضرب طرفي العلاقة $6 \times$ نجد أن:

$$2x - 3y = 6$$
$$2x - 3y - 6 = 0$$



شكل 2. 9

مثـــال (12)

أوجد ميل الخط المستقيم والجزء المقطوع من محور y لكل من المعادلات الآتية:

$$(1) \qquad y = -\frac{1}{5}x + 6$$

$$(2) \qquad 3x = y - 20$$

$$(3) \qquad 2y = 4x - 3$$

الحل

للحصول على ميل المستقيم والجزء المقطوع من محور y يجب وضع معادلة المستقيم على الصورة:

$$y = mx + c$$

(1) نجد أن معادلة المستقيم هي:

$$y = -\frac{1}{5}x + 6$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالصورة السابقة نجد أن ميل المستقيم $m = -\frac{1}{5}$، والجزء المقطوع من محور y يساوي $c = 6$ في الاتجاه الموجب لمحور y. انظر الشكل 10.2.

(2) أولاً يجب وضع المعادلة المعطاة في صورة مطابقة للمعادلة، أي أن:

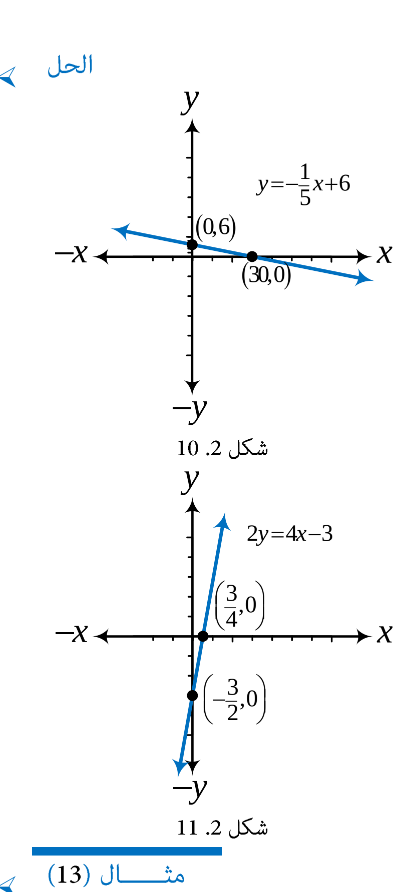
$$3x = y - 20 \Rightarrow y = 3x + 20$$

وبالمقارنة نجد أن ميل هذا المستقيم $m = 3$ والجزء المقطوع من محور y يساوي $c = 20$ في الاتجاه الموجب لمحور y.

(3) أيضاً يجب وضع معادلة المستقيم في صورة مطابقة للمعادلة بداية الحل، أي أن:

$$2y = 4x - 3 \Rightarrow y = 2x - \frac{3}{2}$$

وبالمقارنة نجد أن ميل هذا المستقيم $m = 2$ والجزء المقطوع من محور y يساوي $c = -\frac{3}{2}$ والاشارة السالبة تعني أن الجزء المقطوع من محور y في الاتجاه السالب للمحور. انظر الشكل 11.2.



شكل 2. 10

شكل 2. 11

مثـــال (13)

أوجد الجزئين المقطوعين من المحاور للمستقيم: $4x + 3y = 12$

الحل

لإيجاد الجزئين المقطوعين من المحاور نضع معادلة المستقيم على الصورة:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

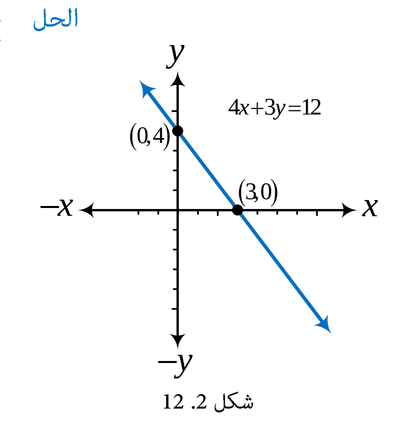
بقسمة طرفي معادلة المستقيم المعطاة على 12 ينتج أن:

$$\frac{4x}{12} + \frac{3y}{12} = \frac{12}{12} \Rightarrow \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$$

وبمقارنة معاملات هذه المعادلة بالصورة السابقة ينتج أن:

$$a = 3, \qquad b = 4$$

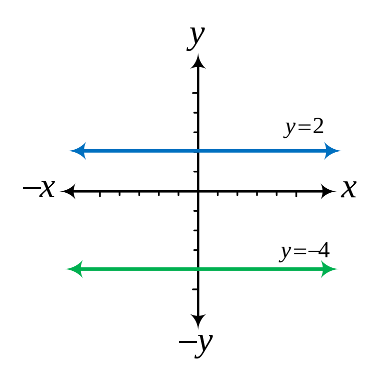
وبالتالي فإن الجزء المقطوع من محور x هو $a = 3$ والجزء المقطوع من محور y هو $b = 4$.



شكل 2. 12

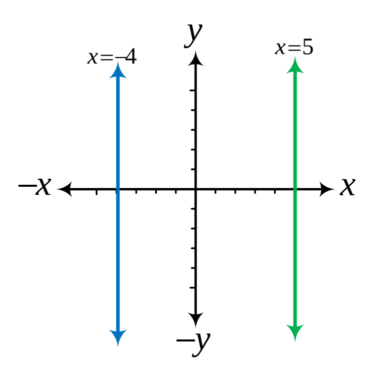
حالات خاصة لمعادلة الخط المستقيم

(Special Cases)



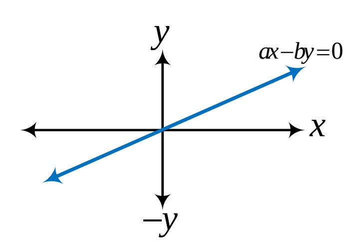
شكل 2. 13

في الشكل 13.2 نجد أن المستقيم $y = 2$ يوازي محور x ويقع في الاتجاه الموجب لمحور y والمستقيم $y = -4$ أيضاً يوازي محور x ولكنه في الاتجاه السالب لمحور y.



شكل 2. 14

في الشكل 14.2 نجد أن المستقيم $y = 5$ يوازي محور y ويقع في الاتجاه الموجب لمحور x والمستقيم $x = -4$ أيضاً يوازي محور y ولكنه في الاتجاه السالب لمحور x.



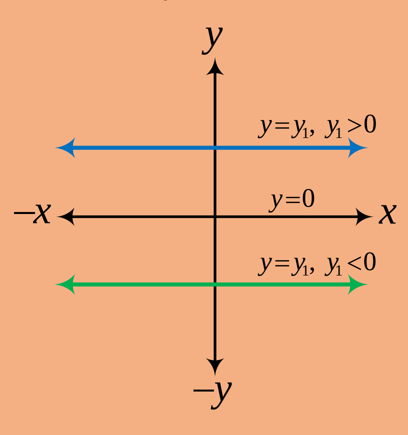
شكل 2. 15

(أ) **الصورة العامة لمعادلة المستقيم الذي يوازي محور x هي**

$$y = y_1$$

ومنها نجد أن معادلة محور السينيات هي:

$$y = 0$$



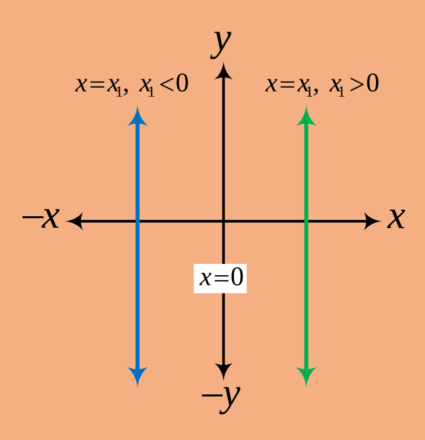
شكل 2. 16

(ب) **الصورة العامة لمعادلة المستقيم الذي يوازي محور y هي**

$$x = x_1$$

ومنها نجد أن معادلة محور الصادات هي:

$$x = 0$$



شكل 2. 17

(ج) **الصورة العامة لمعادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل هي:**

$$ax - by = 0$$

حيث a/b ميل المستقيم.

مثـــال (14)

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-3,-4)$ ويوازي محور x.

الحل

الصورة العامة للمستقيم الذي يوازي محور x هي

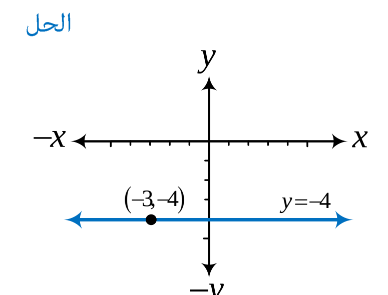
$$y = y_1$$

وحيث أن المستقيم يمر بالنقطة $(x_1, y_1) = (-3,-4)$، نجد أن معادلة المستقيم هي:

$$y = -4$$

انظر الشكل 18.2

الذي يمثل المستقيم $y = -4$ في محاور الاحداثيات.



شكل 2. 18

توازي مستقيمين
(Parallel Lines)

شرط توازي المستقيمين L_1, L_2 هو أن ميل المستقيم الأول m_1 يساوي ميل المستقيم الثاني m_2 أي أن:

$$m_1 = m_2$$

تعامد مستقيمين
Perpendicular Lines

شرط تعامد المستقيمين L_1, L_2 هو أن حاصل ضرب ميل المستقيم الأول m_1 في ميل المستقيم الثاني m_2 يكون مساوياً -1 أي أن:

$$m_1 m_2 = -1$$

أو بصورة أخرى:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

مثـــال (15)

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-1,2)$ ويكون عمودي على المستقيم:

$$x - 4y + 5 = 0$$

الحل

أولاً نوجد ميل المستقيم المعطى وليكن m_2، ومعالة المستقيم المعلوم على الصورة العامة ولذلك فإن ميل هذا المستقيم:

$$m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$$

وبما أن المستقيم المطلوب عمودي على المستقيم المعطى، إذن حاصل ضرب ميلهما يجب أن يساوي -1 أي أن:

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \quad m_1\left(\frac{1}{4}\right) = -1$$

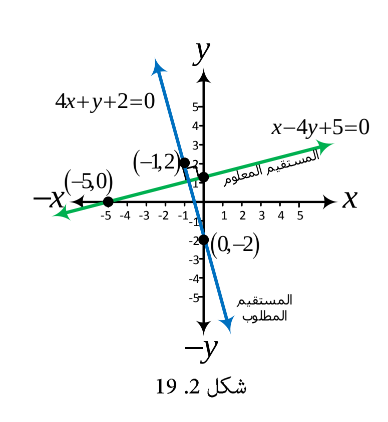
ومن ذلك نستنتج أن:

$$m_1 = -4$$

والآن لدينا ميل المستقيم المطلوب ونقطة واقعة عليه، ولذلك سنستخدم الصورة:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

وبالتعويض عن $m_1 = -4$، وعن النقطة $(x_1, y_1) = (-1,2)$ نجد أن:



شكل 2. 19

$$y - 2 = -4(x - (-1))$$
$$y - 2 = -4x - 4$$
$$4x + y + 2 = 0$$

وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم المطلوب. أنظر الشكل 19.2.

مثـــال (16)

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2,5)$ ويوازي المستقيم: $y - 2x + 1 = 0$

الحل

بفرض أن ميل المستقيم المطلوب m_1، وميل المستقيم المعلوم m_2 حيث:

$$m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{(-2)}{1} = 2$$

وحيث أن المستقيم المطلوب يوازي المستقيم المعلوم، أي أن:

$$m_1 = m_2 = 2$$

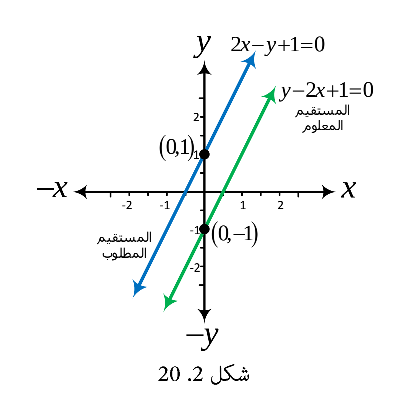
والآن لدينا ميل المستقيم المطلوب ونقطة واقعة عليه، ولذلك سنستخدم الصورة:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

وبالتعويض عن $m_1 = 2$، وعن النقطة $(x_1, y_1) = (2,5)$ نجد أن:

$$y - 5 = 2(x - 2)$$
$$y - 5 = 2x - 4$$
$$2x - y + 1 = 0$$

وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم المطلوب. أنظر الشكل 20.2.



شكل 2. 20

مثـــال (17)

أوجد معادلة الخط المستقيم الموازي للمستقيم: $3x - 4y - 1 = 0$ ويقطع جزء قدره 3 من محور y.

الحل

بفرض أن ميل المستقيم المطلوب m_1، وميل المستقيم المعلوم m_2 حيث:

$$m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{(-4)} = \frac{3}{4}$$

وحيث أن المستقيم المطلوب يوازي المستقيم المعلوم، أي أن:

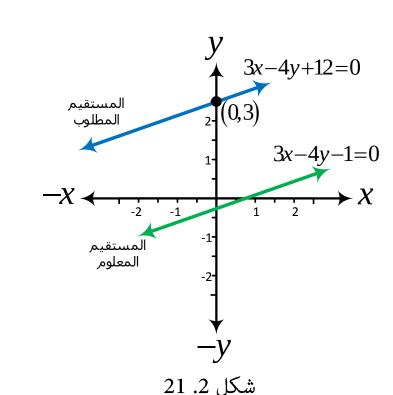
$$m_1 = m_2 = \frac{3}{4}$$

والآن لدينا ميل المستقيم المطلوب وأيضاً لدينا الجزء الذي يقطعه هذا المستقيم من محور y وهو $c = 3$ وبالتالي نستخدم الصورة:

$$y = m_1 x + c$$

وبالتعويض عن $m_1 = \frac{3}{4}$، وعن قيمة $c = 3$، أي أن:

$$y = \frac{3}{4}x + 3 \Rightarrow \quad 3x - 4y + 12 = 0$$



شكل 2. 21

الاختبار الذاتي (13)
Self-Test (13)

1. اختر الاجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) ميل المستقيم الذي معادلته $ax + by + c = 0$ هو:

a. $m = -\frac{b}{a}$ b. $m = -\frac{a}{b}$ c. $m = \frac{a}{b}$

(ب) ميل المستقيم الذي يوازي محور x:

a. $m = 0$ b. $m = 1$ c. غير معروف

(ج) معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{4}$ ويقطع جزءاً قدره 3 من محور y:

a. $3x + 4y = 0$ b. $4y - x - 12 = 0$ c. $4y - x = 0$

(د) إذا توازى مستقيمان ميل الأول m_1 وميل الثاني m_2 فإن:

a. $m_1 = m_2$ b. $m_1 m_2 = -1$ c. $m_1 = -m_2$

(هـ) إذا تعامد مستقيمان، ميل الأول m_1 وميل الثاني m_2 فإن:

a. $m_1 m_2 = -2$ b. $m_1 m_2 = -1$ c. $m_1 m_2 = 0$

(و) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(5,3)$ ويوازي المستقيم $y = 2x + 5$ هي:

a. $y = 2x + 7$ b. $y = 2x - 7$ c. $2y = x + 7$

(ز) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(5,3)$ ويتعامد على المستقيم $y = 2x + 5$ هي:

a. $2y + x = 11$ b. $2y - x = 11$ c. $2x + y = 11$

تمـــــارين
Exercises

1. أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(1,4)$, $(7,10)$.
2. أوجد ميل المستقيم الذي معادلته $2x + 4y + 4 = 0$
3. أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$ ويقطع جزءاً قدره -2 من محور y.
4. أوجد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{4}$ ويقطع جزءاً قدره 3 من محور y.
5. اوجد ميل المستقيم $2x + 4y = 20$ وأوجد أيضاً الجزء الذي يقطعه هذا المستقيم من محور y.
6. أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2,4)$ وميله $\frac{1}{2}$.
7. أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2,8)$, $(4,3)$.
8. أحسب الجزئين المقطوعين من المحاور للمستقيم $2x - 3y = 6$
9. أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(3,-4)$ ويوازي المستقيم $2x + 3y + 7 = 0$
10. أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم $3x - 4y - 9 = 0$ ويمر بالنقطة $(1,2)$.
11. أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(0,5)$ ويتعامد على المستقيم $4x - y = 8$
12. أوجد ميل المستقيم $x - y + 7 = 0$
13. أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (b,a), (a,b).
14. المستطيل $ABCD$ فيه $A(2,1)$، $C(1,3)$، أوجد معادلة كل من:

AC , AB, CB

الباب الثالث

المعادلات والمتراجحات الخطية



الفصل الخامس

المتراجحات الخطية

الفصل الخامس : المتراجحات الخطية

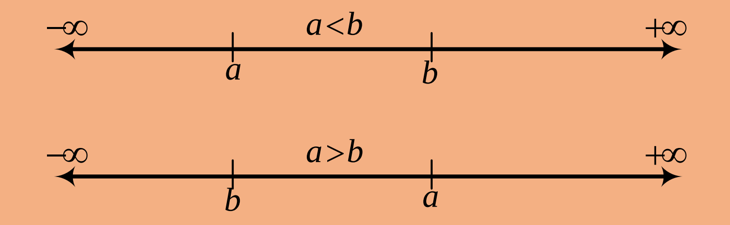
محتويات الفصل

الفصل الخامس: المتراجحات الخطية

Section (5): Linear Inequalities

المتراجحة (المتباينة)
(Inequality)

إذا كانت $a, b \in R$ وكانت $a \neq b$ فإما أن يكون a أصغر من b وتكتب $a < b$ وإما أن تكون a أكبر من b وتكتب $a > b$ ويمكن تمثيل ذلك على خط الأعداد الحقيقية شكل 1.5.



خواص المتراجحة
(Inequality Properties)

إذا كانت كل من $a, b, c, \in R$ وكانت $a < b$ فإن:

(1) $a + c < b + c,$

(2) $a - c < b - c,$

(3) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b},$

وإذا كانت $c > 0$ فان:

(4) $ac < bc,$

(5) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

وإذا كانت $c < 0$ فان:

(6) $ac > bc,$

(7) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

حل المتراجحة الخطية
(Solving linear Inequality)

حل المتراجحة الخطة (المتراجحة من الدرجة الأولى) يعني إيجاد قيمة المتغير على هيئة فترة أو فترات مختلفة.



ابن سينا

هو أبو علي الحسين بن عبد الله اشتهر في مجال الطب والفلسفة، فارسي الأصل ولد قرب قرية بخارى (روسيا) عام (370هـ – 980م) وتوفي في إيران عام (428هـ – 1720م).

أهم مؤلفاته:

في مجال الرياضيات، الشفاء، الفن الثاني في الرياضيات (الحساب).

مثـــــال (1)

حل المتراجحة التالية:

$$2x + 7 < 11$$

الحل

الخطوة الأولى: إزالة 7 من الطرف الأيسر من المتراجحة:

$$2x + 7 - 7 < 11 - 7$$
$$2x < 11 - 7$$
$$2x < 4$$

الخطوة الثانية: نقسم طرفي المتراجحة على 2:

$$\frac{2x}{2} < \frac{4}{2}$$
$$x < 2$$

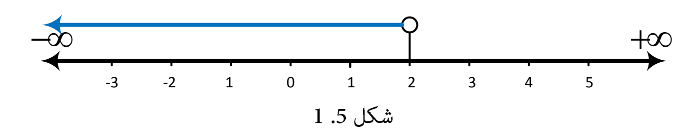
وبالتالي فإن مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من العدد 2 وتكتب مجموعة الحل على الصورة:

$$s = \{x: x < 2\}$$

ويمكن كتابتها على صورة فترة مفتوحة:

$$s = (-\infty, 2)$$

وتمثل على خط الأعداد شكل 1.5.



شكل 5. 1

مثـــــال (2)

حل المتراجحة

$$4x - 5 \geq x + 10$$

الحل

الخطوة الأولى: يتم تجميع المتغيرات معاً في طرف من أطراف المتراجحة واحد والاعداد في الطرف الآخر:

$$4x - 5 \geq x + 10$$
$$4x - x \geq 10 + 5$$
$$3x \geq 15$$

الخطوة الثانية: بقسمة طرفي المتراجحة على 3 نحصل على:

$$3x \geq 15$$
$$\frac{3x}{3} \geq \frac{15}{3}$$
$$x \geq 5$$

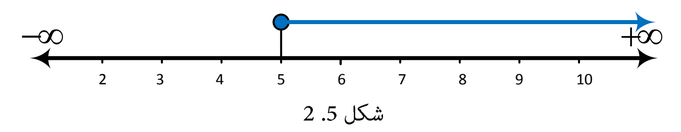
إذن يمكن كتابة الحل على هيئة مجموعة:

$$s = \{x: x \geq 5\}$$

على صورة فترة نصف مغلقة

$$s = [5, \infty)$$

وتمثل على خط الأعداد شكل 2.5.



شكل 5. 2

مثـــــال (3)

حل المتراجحة

$$8x + 4 \leq 5x + 16$$

الحل

الخطوة الأولى: يتم تجميع المتغيرات معاً في طرف من أطراف المتراجحة واحد والاعداد في الطرف الآخر:

$$8x + 4 \leq 5x + 16$$
$$8x - 5x \leq 16 - 4$$
$$3x \leq 12$$

الخطوة الثانية: بقسمة طرفي المتراجحة على معامل x وهو العدد 3 نحصل على:

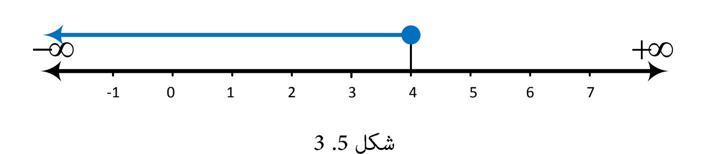
$$\frac{3x}{3} \leq \frac{12}{3}$$
$$x \leq 4$$

أي أن مجموعة الحل تكون على صورة مجموعة

$$s = \{x : x \leq 4\}$$

وعلى صورة الفترة (الفترة نصف مفتوحة):

$$s = (-\infty, 4]$$



شكل 5. 3

> ملحوظة (1)
>
> يمكن الاستفادة من مفهوم القيمة المطلقة في إيجاد حل المتراجحات فإذا كانت:
>
> $$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$
>
> فإن مجموعة الحل هي
>
> $$s = [x, -x]$$
>
> وإذا كانت:
>
> $$|x| < a$$
>
> فإن:
>
> $$-a < x < a$$
>
> وتكون مجموعة الحل
>
> $$s = \{x : -a < x < a\}$$
>
> -∞ $-a$ a +∞

مثـــــال (4)

حل المتراجحة التالية

$$|3x - 15| < 3$$

الحل

الخطوة الأولى: حيث أن المتراجحة تحتوي على حد عبارة عن قيمة مطلقة نحول المتراجحة إلى الشكل:

$$|3x - 15| < 3$$
$$-3 < 3x - 15 < 3$$

الخطوة الثانية: بإضافة 15 إلى جميع أطراف المتراجحة:

$$-3 < 3x - 15 < 3$$
$$-3 + 15 < 3x - 15 + 15 < 3 + 15$$
$$12 < 3x < 18$$

الخطوة الثالثة: بقسمة أطراف المتراجحة على معامل x وهو العدد 3:

$$\frac{12}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{18}{3}$$
$$4 < x < 6$$

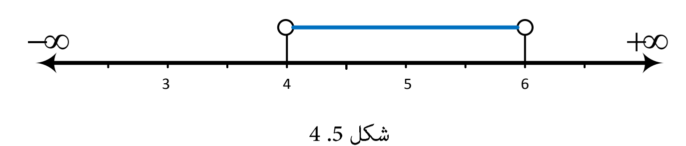
أي أن مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة من 4 إلى 6 ونكتبها على صورة مجموعة:

$$s = \{x: 4 < x < 6\}$$

وعلى هيئة فترة:

$$s = (4,6)$$

وتمثل على خط الأعداد شكل 4.5.



شكل 5. 4

مثـــــال (5)

حل المتراجحة

$$|x - 1| \leq 5$$

الحل

الخطوة الأولى: حيث أن المتراجحة تحتوي على حد عبارة عن قيمة مطلقة نحول المتراجحة إلى الشكل:

$$|x - 1| \leq 5$$
$$-5 \leq x - 1 \leq +5$$

الخطوة الثانية: بإضافة 1 إلى جميع أطراف المتراجحة:

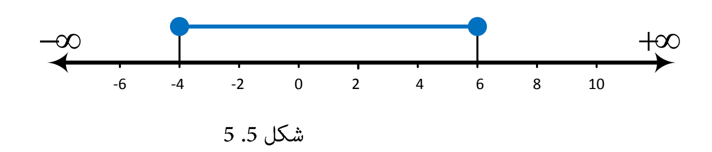
$$-5 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 5 + 1$$
$$-4 \leq x \leq 6$$

أي أن مجموعة الحل هي الفترة المغلقة:

$$s = [-4,6]$$

$$s = \{x: -4 \leq x \leq 6\}$$

وتمثل على خط الأعداد شكل 5.5.



شكل 5. 5

الاختبار الذاتي (14)

Self-Test (14)

اختر الإجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) إذا كانت $m < n$ فإن

a. $m + 5 < n + 5$ b. $m + 5 > n + 5$

(ب) إذا كانت $-6x + 13 < 37$ فإن:

a. $x > -4$ b. $x < -4$

(ج) إذا كانت $2x + 3 < x < 3x + 16$ فان مجموعة الحل هي:

a. $-8 < x < 3$ b. $-8 < x < -3$

(د) إذا كانت $3 - 4x \leq 2x + 9$ فإن مجموعة الحل هي:

a. $x \geq 1$ b. $x \leq -1$ c. $-1 \leq x \leq -1$

(هـ) إذا كانت $|x - 2| \leq 3$ فإن حل المتراجحة على صورة فترة هي:

a. $(-1,5)$ b. $(-1,5]$ c. $[-1,5]$

(و) إذا كانت $|2x - 7| < 1$ فإن مجموعة حل المتراجحة على صورة فترة هي:

a. $(3,4)$ b. $[3,4)$ c. $[3,4]$

(ز) حل المتراجحة $3x + 3 \leq x + 1$ هو:

a. $(-\infty, -1)$ b. $(-\infty, -1]$ c. $(-\infty, 0)$

(ح) حل المتراجحة $2|x - 3| \leq 4$ هو:

a. $(1,5]$ b. $[1,5]$ c. $[1,5)$

تمـــــــارين

Exercises

أوجد حل المعادلات الآتية:

(1) $3x - 2 \leq 19$

(2) $3x + 4 < 19$

(3) $2x - 3 \geq 5$

(4) $2x - 3 \leq 5x + 18$

(5) $|12x + 5| < 13$

(6) $|3x - 7| \leq 8$

(7) $|3x - 4| \geq 5$

(8) $|2 - 4x| < 6$

(9) $-2x + 3 \leq 12$

(10) $6x - 10 \geq 3x + 5$

(11) $-5 \geq 10x$

(12) $4x + 6 < 3x + 5$

(13) $3x - 2 < 1$

(14) $10x - 1 > 8x - 3$

(15) $|x - 7| < 5$

(16) $|5 - 3x| \geq 4$

الباب الرابع: الدوال

الهدف من هذا الباب

في الجزء الأول من الباب سنتعرف على الأزواج المرتبة والعلاقات ومعنى الدالة وتعريفها ومجاله ومداها، بالاضافة إلى التعرف على بعض أنواع الدوال التي ستستخدمها مستقبلاً في مجال دراستك كدوال كثيرات الحدود والدوال الأسية والدوال الكسرية وغيرها ثم نتطرق لبعض خواص الدوال وأخيراً ستتعرف على بعض أنواع الدوال الغير جبرية كالدوال المثلثية.

1

الفصل الأول: العلاقات

2

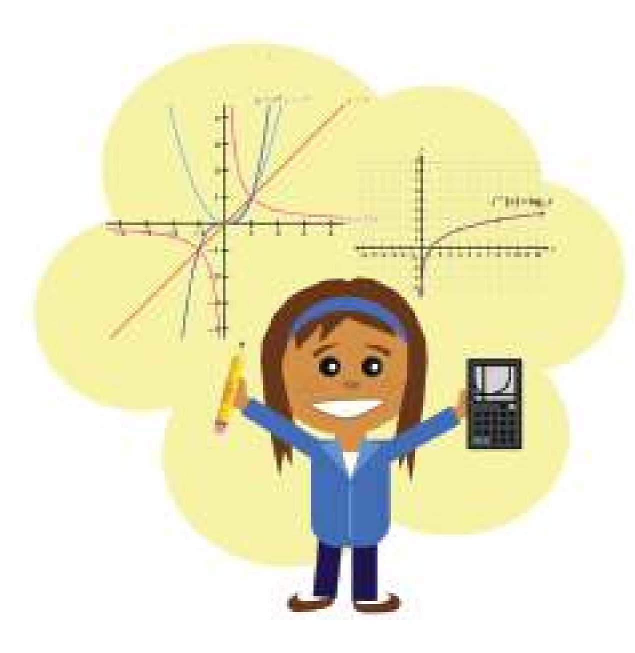
الفصل الثاني: الدوال الجبرية

3

الفصل الثالث الدوال الزوجية والدالة الفردية

4

الفصل الرابع الدوال الغير جبرية



بعد الانتهاء من هذا الباب يجب أن تكون قادراً على فهم:
معنى الدالة وخواصها وكيفية ايجاد مداها ومجالها، وأن تكون قادراً على تمييز الدالة من حيث كونها زوجية أم فردية، ويجب أن تكون ملماً بخواص الدوال المثلثة والدوال الأسية والدوال اللوغاؤيتمية إضافة إلى أنك يجب أن تعي خواص وقوانين اللوغاريتمات.

الباب الرابع

الدوال



الفصل الأول

العلاقات

الفصل الأول : العلاقات

محتويات الفصل

الفصل الأول: العلاقات

Section(1): Relations

الأزواج المرتبة
(Ordered Pairs)

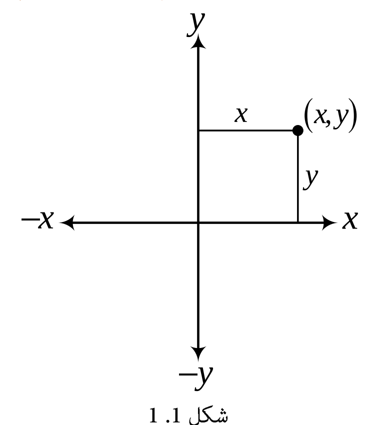
إذا كان x, y عنصرين ليس بالضرورة مختلفين فإن الزوج المرتب (x, y) يتكون من x, y على الترتيب حيث x يسمى المسقط الأول و y يسمى المسقط الثاني. يمكن تمثيل الزوج المرتب في الاحداثيات الكارتيزية شكل 1.1 وعند التعامل مع الأزواج المرتبة يجب مراعاة ما يلي:

- الحفاظ على ترتيب المسقطين للزوج المرتب فالزوج $(3,7)$ يختلف عن الزوج $(7,3)$
- الزوج المرتب (a, b) يختلف عن المجموعة $\{a, b\}$
- إذا كان $(a, b) = (c, d)$ فإن $a = c$ ، $b = d$ والعكس صحيح. فمثلاً

$$\left(-\frac{9}{3}, \frac{4}{2}\right) = (-3,2)$$

وعكس ذلك صحيح فمثلاً:

$$(a, b) \neq (c, d) \Longrightarrow a \neq c, b \neq d$$



شكل 1.1

مثـــــال (1)

أوجد قيمة y, x إذا كان الزوجين $(3, y), (x, -1)$ متساويين.

بما أن الزوجان المرتبان متساويان:

$$(3, y) = (x, -1)$$

لذلك من خواص الأزواج المرتبة نجد أن المسقط الأول للزوج الأول يساوي المسقط الأول للزوج الثاني، المسقط الثاني للزوج الأول يساوي المسقط الثاني للزوج الثاني أي أن:

$$x = 3 \quad , \quad y = -1$$


الكرجي (أو الكرخي)

هو فخر الدين محمد بن الحسن الحاسب وهو رياضي من بلاد فارس ونشأ حيث ينسب أحياناً إلى جبال الكرج وقد تثقف الكرجي بالرياضيات والهندسة ويعد من أوائل الذين عالجوا معادلات الدرجة الثانية والجذور التقريبية للأعداد وتوصل إلى قانون

(الأعداد المكعبة في متوالية طبيعية = مجموع تلك الأعداد المربعة)

أهم مؤلفاته:

الفخري في الجبر والمقابلة، حيث ألفه في (401هـ ـ أو 407هـ)، كتاب البديع في الجبر والمقابلة، في الوصايا بالجذور، علل حساب الجبر والمقابلة، شرح صدور مقالات إقليدس.

مثـــــال (2)

أوجد y, x إذا كان الزوجين المرتبين $(3,-1), (x+4, y-1)$ متساويان.

الحل

من معطيات المثال أن الزوجان المرتبان متساويان:

$$(3,-1) = (x+4, y-1)$$

ولذلك فإن:

$$3 = x + 4 \Longrightarrow x = -1$$
$$-1 = y - 1 \Longrightarrow y = 0$$

حاصل الضرب الكارتيزى

يعرف حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين A, B غير خاليتين بأنه المجموعة المكونة من جميع الأزواج المرتبة (x, y) ويرمز له بالرمز $A \times B$ حيث أن $x \in A$, $y \in B$ أي أن:

$$A \times B = \{(x, y)\}: x \in A, y \in B$$

خواص الضرب الكارتيزي

إذا كان لدينا مجموعتان A, B فإن:

(أ) عملية الضرب الكارتيزي للمجموعتين غير إبداليه أي أن:

$$A \times B \neq B \times A$$

(ب) عدد عناصر المجموعة الناتجة من $A \times B$ هو نفس عدد العناصر الناتجة من $B \times A$ وبالتالي فإن رتبة $A \times B$ هي نفس رتبة $B \times A$ أي أن:

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$$

(ج) لأي مجموعة غير خالية A

$$A \times \phi = \phi \times A = \phi$$

مثـــــال (3)

إذا كانت لدينا المجموعتان A, B حيث:

$$A = \{1,2\} \ , \qquad B = \{a, b, c\}$$

اوجد كلاً من:

$$A \times B \ , \qquad A \times A$$

الحل

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$
$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

مثـــال (4)

إذا كانت لدينا المجموعتان A, B حيث:

$$A = \{1,3,5\} \;, \qquad B = \{-2,4\}$$

اوجد كلاً من:

$$A \times B \,, \qquad B \times A$$

الحل

$$A \times B = \{(1,-2),(1,4),(3,-2),(3,4),(5,-2),(5,4)\}$$
$$B \times A = \{(-2,1),(-2,3),(-2,5)(4,1),(4,3),(4,5)\}$$

مثـــال (5)

أوجد رتبة $A \times B$ إذا كانت:

$$A = \{-1,0\} \;, \qquad B = \{2,4\}$$

الحل

نعين أولاً $A \times B$

$$A \times B = \{(-1,2),(-1,4),(0,2)(0,4)\}$$

وبالتالي فإن عدد عناصر المجموعة الناتجة من عملية الضرب هو 4 ورتبة $A \times B$ تساوي 4 ويمكن إيجادها بطريقة أخرى، حيث

$$|A \times B| = |A| \times |B| = 2 \times 2 = 4$$

العلاقات الثنائية

يقال أن R علاقة ثنائية من المجموعة A إلى المجموعة B على أنها مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعتين أي أنها مجموعة من الأزواج المرتبة حيث يسمى الإحداثي الأول بالمجال والاحداثي الثاني بالمدى، فمثلاً إذا كانت:

$$A = \{1,2,3\} \,, \qquad B = \{2,3,4,6\}$$

يمكن كتابة بعض العلاقات من A إلى B على النحو الآتي

$$R_1 = \{(a,b): a \in A, b \in B, a > b\}$$
$$R_2 = \{(a,b): a \in A, b \in B, a + b = 3\}$$
$$R_3 = \{(a,b): a \in A, b \in B, a = b\}$$

ملحوظة (1)

إذا كانت $R = \phi$ فاننا نقول أن R خالية

وإذا كانت $R = A \times \mathrm{B}$ أو كانت $R = B \times A$ فإننا نقوم ان العلاقة R ممثلة

التعبير عن العلاقة

يمكن التعبير عن العلاقة بإحدى الطرق الآتية

(أ) الأزواج المرتبة

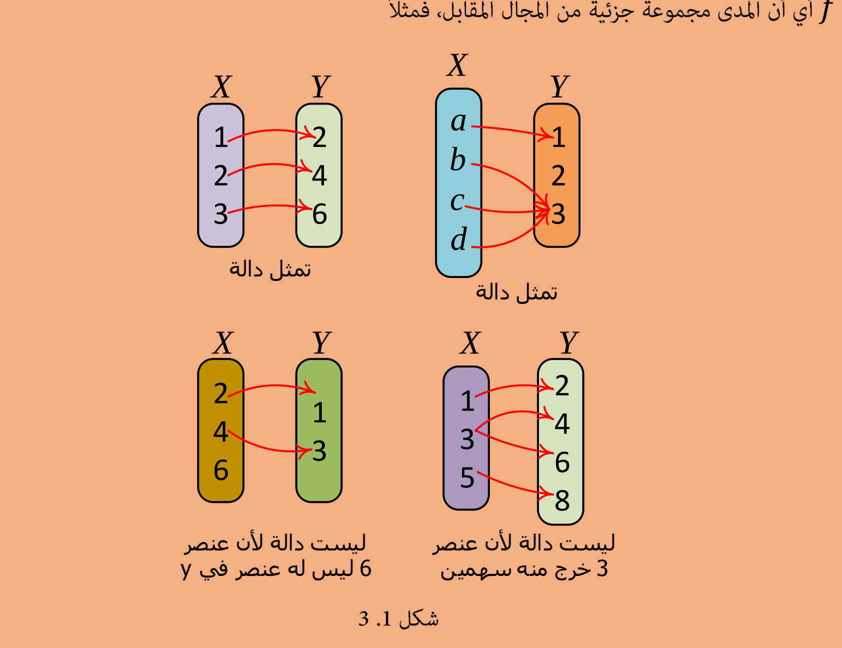
(ب) المخطط السهمي

(ج) المخطط البياني

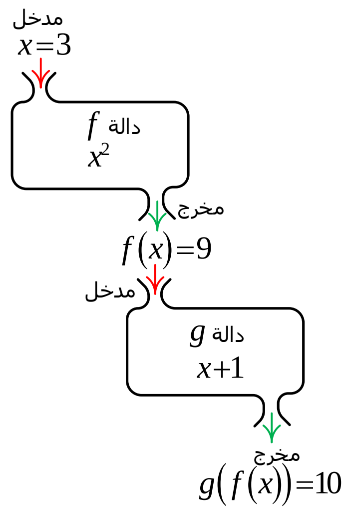
وسوف يتم استخدام هذه الطرق في توضيح مفهوم الدالة.

الدالة
(Function)

إذا كانت X, Y مجموعتين غير خاليتين وكانت f علاقة معرفة من X إلى Y بحيث كل عنصر من المجموعة الأولى X يرتبط بعنصر وحيد ومحدد من المجموعة الثانية Y تعرف الدالة على الصورة $f: X \to Y$ يسمي X مجال الدالة ويسمى Y بالمجال المقابل كما يسمى $f(x)$ (مجموعة جميع صور عناصر X) بمدي الدالة f أي أن المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل، فمثلاً



شكل 1. 3



شكل 1. 2

التعبير عن الدالة

يمكن التعبير عن الدالة بأحد الطرق الاتية:

(أ) **الأزواج المرتبة:** أن يظهر جميع عناصر المجموعة الأولى مرة واحدة فقط.
(ب) **المخطط السهمي:** أن يخرج من كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى سهم واحد فقط.
(ج) **المخطط البياني:** رسم العلاقة حسب النقاط المعلومة.

مثـــال (6)

إذا كانت:

$$X = \{1,2,3,4\}, \qquad Y = \{a, b, c, d\}$$

فبين أي من العلاقات التالية تسمي دالة من X إلى Y

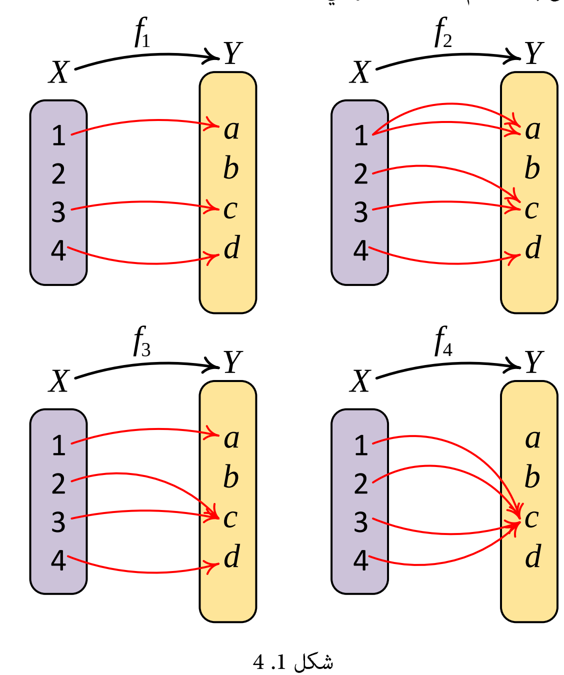
$$f_1 = \{(1, a), (3, c), (4, d)\}$$
$$f_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c), (4, d)\}$$
$$f_3 = \{(1, a), (2, c), (3, c), (4, d)\}$$
$$f_4 = \{(1, c), (2, c), (3, c), (4, c)\}$$

الحل

- العلاقة f_1 ليست دالة لأن العنصر 2 موجود في المجموعة الأولى X وليس له نظير في المجموعة الثانية Y.
- العلاقة f_2 ليست دالة لأن العنصر 1 موجود في المجموعة الأولى X يوجد وله نظيرين في المجموعة الثانية Y وهذا يخالف تعريف الدالة.

- العلاقة f_3 دالة لأن كل عنصر موجود في المجموعة الأولى X يوجد له نظير في المجموعة الثانية Y.
- العلاقة f_4 دالة لأن كل عنصر موجود في المجموعة الأولى X يوجد له نظير في المجموعة الثانية Y.

يمكن حل المثال السابق باستخدام المخطط السهمي شكل 4.1.



شكل 1. 4

المجال (Domain)

إذا كانت $f: X \to Y$ فان مجالها هو مجموعة عناصر x ويرمز له بالرمز D_f.

المجال المقابل

إذا كانت $f: X \to Y$ فإن المجال المقابل هو مجموعة عناصر y

المدى (Range)

هو مجموعة العناصر للمجموعة y أي أن المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل ويرمز له بالرمز R_f

مثـــال (7)

لتكن $A = \{a, b, c\}, B = \{1,2,3\}$ والعلاقة $f: A \to B$ على الشكل:

مجال الدالة:

$$D = \{a, b, c\}$$

المجال المقابل:

$$\{1,2,3\}$$

المدى:

$$R = \{1,2\}$$

مثـــال (8)

إذا كانت $A = \{2,4,6\}, B = \{x, y, z\}$ ، أي من العلاقات الاتية دالة، أم لا، وأوجد مجالها ومداها في حال كونها دالة من A إلى B.

$$f_1 = \{(2, x), (4, y), (6, z)\}$$
$$f_2 = \{(2, x), (4, x), (6, x)\}$$
$$f_3 = \{(2, y), (4, x), (6, x)\}$$
$$f_4 = \{(2, x), (4, y), (6, z), (6, y)\}$$
$$f_5 = \{(2, z), (4, z)\}$$

الحل

لكي تكون العلاقة تمثل داله يجب أن يظهر عناصر المجموعة A في الزوج المرتب مرة واحدة فقط وأن يظهر عناصر المجموعة A كلها وبالتالي فإن:

f_1 تمثل دالة مجالها هو $\{2,4,6\}$ ومداها $\{x, y, z\}$.

f_2 تمثل دالة مجالها هو $\{2,4,6\}$ ومداها $\{x\}$.

f_3 تمثل دالة مجالها هو $\{2,4,6\}$ ومداها $\{x, y\}$.

f_4 لا تمثل دالة لأن العنصر 6 ظهر مرتين كمسقط الأول.

f_5 لا تمثل دالة لان العنصر 6 لم يظهر في العلاقة.

مثـــال (9)

إذا كانت $f: R \to R$ بحيث $f(x) = x + 4$ أوجد $f(0)$،$f(-1)$

الحل

بما أن $f: R \to R$ فإن المجال هو الأعداد الحقيقية والمجال المقابل هو الأعداد الحقيقة وبالتالي فإن:

$$f(0) = (0) + 4 = 4$$
$$f(-1) = (-1) + 4 = 3$$

مثـــال (10)

إذا كانت $f: R \to R$ بحيث

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$$

أوجد $f(5)$، $f(-1)$

الحل

بما أن $f: R \to R$ فان المجال هو الأعداد الحقيقية ماعدا القيم التي تجعل المقام يساوى الصفر أي أن:

$$D_f = R - \{-2,2\}$$

وبالتالي فإن:

$$f(5) = \frac{3}{25 - 4} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$f(-1) = \frac{3}{1 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

الاختبار الذاتي (15)

Self-Test (15)

اختر الإجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) إذا كانت $A = \{1,2\}$ ، $B = \{l, m\}$ فإن $A \times B$ تساوي

a. $\{(1, l), (1, m), (2, l), (2, m)\}$

b. $\{(l, 1), (m, 1), (l, 2), (m, 2)\}$

(ب) المخطط السهمي: أن يخرج من كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى سهمين للمجموعة الثانية.

a. صواب

b. خطأ

(ج) العلاقة $\{(1,0), (3,5), (4,7)\}$ تمثل دالة

a. صواب

b. خطأ

(د) العلاقة $\{(a, 0), (a, 1), (b, 5)\}$ تمثل دالة

a. صواب

b. خطأ

(هـ) إذا كان $f(x) = 10x^2 - 10$ فإن قيم $f(1)$ تساوي:

a. 1

b. 0

c. -1

(و) إذا كانت $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8}$ فإن قيم $f(3)$ تساوي:

a. 1

b. -1

c. 0

(ز) مجال الدالة $f(x) = 5$ هو:

a. الأعداد الحقيقية

b. الأعداد الطبيعية

c. الأعداد الصحيحة

(ح) مدى الدالة $f(x) = 5$ هو:

a. 5

b. الأعداد الحقيقية

c. الأعداد الصحيحة

تمـــــــارين

Exercises

1- أي من العلاقات التالية تمثل دوال

a. $\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\}$

b. $\{(a,1),(a,2),(b,3)\}$

c. $\{(3,-3),(4,-1),(5,0)\}$

d. $\{(-1,2),(2,2),(3,5),(3,1)\}$

2- إذا كانت $f(x)=100$ اوجد $f(0)$ ، $f(-3)$ ، $f\left(\frac{1}{2}\right)$

3- إذا كانت $f:R\rightarrow R$ معرفة $f(x)=3x-1$ اوجد $f(3)$

4- إذا كانت $f(x)=3x+1$ اوجد $f(x^2)$ ،$f(-1)$،$f(0)$

5- إذا كانت $f(x)=\sqrt{x+3}$ اوجد $f(-3)$ ،$f(1)$،$f(6)$

6- إذا كانت $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ اوجد $f(0)$ ،$f(2)$،$f(-1)$

7- اوجد المجال والمدى للدول الاتية:

a. $\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\}$

b. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(8,8)\}$

c. $\{(-2,0),(-1,-2),(1,2),(0,-1)\}$

d. $\{(2,5),(3,7),(4,9),(5,11)\}$

الباب الرابع

الدوال

$f(x)$

الفصل الثاني

الدوال الجبرية

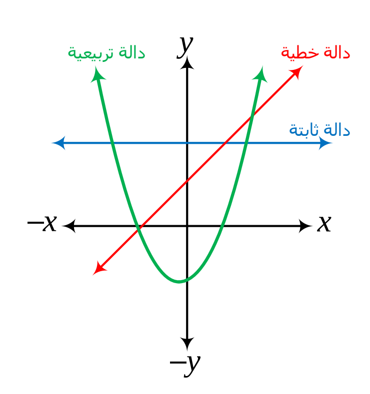
الفصل الثاني : الدوال الجبرية

محتويات الفصل

الفصل الثاني: الدوال الجبرية
Section (2): Algebraic Functions

سبق وأن تعرفنا على الدالة في الفصل السابق، وفي هذا الفصل سنتحدث بشكل أوضح عن بعض أنواع الدوال، حيث تنقسم الدوال إلى نوعين رئيسيين: الأول منها: دوال جبرية، موضوع هذا الفصل، وهي كل دالة يكفي لحساب كل قيمها إجراء عملية جبرية (جمع – طرح – ضرب – قسمة – جذر) أو أكثر ومن نوعية هذه الدوال دوال كثيرات الحدود والدوال الكسرية والدوال الجذرية إلخ...، والنوع الثاني من الدوال هو الدوال الغير جبرية، موضوع الفصل القادم، ومن أمثلتها الدوال المثلثية والدوال الأسية.

(1) دوال كثيرات الحدود



شكل 1.2



المهاني

هو أبو عبدالله محمد بن فارس عيسى، وهو رياضي وفلكي، ويعد من العلماء الذين برزوا في الرياضيات والفلك وأصله من بلاد فارس و توفي عام (261ـ267هـ) (874 ـ880م)

من أهم مؤلفاته:
في الجبر معادلته الشهيرة باسم (معادلة المهاني)، وهي من معادلات الدرجة الثانية ، كتاب في النسبة، كتاب شرح ما ألفه أرخميدس في الكرة و الأسطوانة، كما عالج المهاني مسألة أرخميدس الخاصة بالمستوى الذي يقطع الكرة إلى جزئين.

الصورة العامة لدالة كثيرة الحدود هي:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots\cdots \cdots\cdots + a_1 + a_0$$

حيث أن

$$a_0, a_1 \cdots, a_n \in R, \qquad a_n \neq 0$$

و $n \geq 0$ (عدد صحيح موجب) ويعبر n عن درجة كثيرة الحدود فمثلاً:

- **<u>الدالة الثابتة (Constant Function):</u>**

  فيها $n = 0$ وتأخذ كثيرة الحدود الشكل:

  $$f(x) = a_0$$

- **<u>الدالة الخطية (Linear Function):</u>**

  فيها $n = 1$ وتأخذ كثيرة الحدود الشكل:

  $$f(x) = a_0 x + a_1$$

- **<u>الدالة التربيعية (Quadratic Function):</u>**

  فيها $n = 2$ وتأخذ كثيرة الحدود الشكل:

  $$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

- **<u>الدالة التكعيبية (Cubic Function):</u>**

  فيها $n = 3$ وتأخذ كثيرة الحدود الشكل:

  $$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

وهكذا...والشكل 1.2 يبين بعض أشكال هذه الدوال.

مثـــــال (1)

هل الدوال الاتية تمثل كثيرات حدود أم لا ثم حدد نوعها ومجالها:

$$y = f(x) = -3$$
$$y = g(x) = -x + 4$$
$$y = h(x) = \sqrt{x} + 4$$
$$y = i(x) = \frac{5}{x} + x^3 + 1$$
$$y = j(x) = x^3 - 27$$

الحل

الدالة $f(x)$ كثيرة حدود وهي عبارة عن دالة ثابتة من الدرجة الصفرية ومجالها هو R.

الدالة $g(x)$ كثيرة حدود وهي دالة من الدرجة الأولى وتسمي الدالة الخطية ومجالها هو R.

الدالة $h(x)$ ليست كثيرة حدود لأن $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ حيث أن الأس ليس عدداً صحيحاً.

الدالة $i(x)$ ليست كثيرة حدود لأن x^{-1} حيث أن الأس عدد صحيح سالب (دالة كسرية).

الدالة $j(x)$ كثيرة حدود وهي دالة من الدرجة الثالثة وتسمى الدالة التكعيبية مجالها هو R.

مثـــــال (2)

أوجد قيمة الدالة $f(x) = 2x + 1$ عندما $x = 0, x = 2, x = -1$

الحل

لإيجاد قيمة دالة عند نقطة معينة نقوم بالتعويض المباشر فنجد أن:

$$f(x) = 2x + 1$$

بالتعويض عن قيمة x بالقيم المعطاة نجد أن:

$$x = 0 \Longrightarrow \quad f(0) = 2(0) + 1 = 1$$
$$x = 1 \Longrightarrow \quad f(1) = 2(1) + 1 = 3$$
$$x = -1 \Longrightarrow \quad f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$$

(2) الدالة الكسرية

الصورة العامة للدالة الكسرية هي:

$$y = f(x) = \frac{h(x)}{r(x)}$$

حيث أن كل من $h(x), r(x)$ كثيرة حدود ، بشرط $r(x) \neq 0$، ومجال الدالة الكسرية هي جميع الأعداد الحقيقية ما عدا أصفار المقام (القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر)، أي أن $r(x) = 0$.

مثـــــال (3)

بين هل الدوال الاتية كسرية أم لا مع ذكر السبب:

$$(1) \qquad y = f(x) = \frac{3}{x+1}$$

$$(2) \qquad y = g(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$(3) \qquad y = h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3x+4}}$$

الحل

الدالة $f(x)$ دالة كسرية، والدالة $g(x)$ ليست كسرية لأن المقام لا يمثل كثيرة حدود لاحتوائه $\sqrt{x}$، والدالة $h(x)$ ليست كسرية لأن المقام والبسط لا يمثلان كثيرات الحدود (دوال جذرية).

مثـــــال (4)

عين مجال الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x) = \frac{3}{x+1}$$

الحل

لإيجاد مجال الدالة يجب معرفة القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر وبالتالي المجال يكون جميع القيم ما عدا القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر وبالتالي فإن:

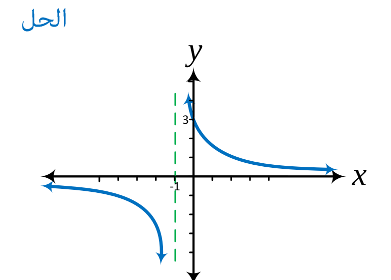
$$x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

فان القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر هي:

$$x = -1$$

فإن المجال

$$D_f = R - \{-1\}$$



$y = f(x)$

شكل 2 .2

مثـــــال (5)

اوجد مجال كل من $f(x), g(x)$ حيث:

$$f(x) = \frac{x+4}{x^2-7x+6}, \qquad g(x) = \frac{x^2-2}{x^3-x^2-6x}$$

الحل

الدالة الأولى $f(x)$ دالة كسرية ولذلك يجب اولاً أن نبحث عن أصفار المقام وذلك بالتحليل، فنجد أن:

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

فان

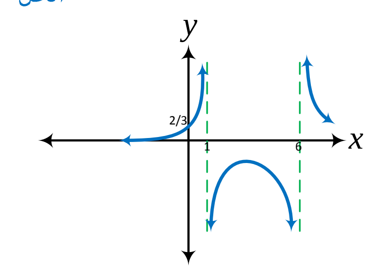
$$(x-6)(x-1) = 0$$

$$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

ولذلك فان مجال الدالة $f(x)$ هو:

$$D_f = R - \{1,6\}$$



$y = f(x)$

شكل 3 .2

وبالنسبة للدالة $g(x)$ هي أيضاً دالة كسرية ولذلك يجب أولاً أن نبحث عن أصفار المقام وذلك بالتحليل، فنجد أن:

$$x^3 - x^2 - 6 = x(x^2 - x - 6) = 0$$

فإن

$$x(x-3)(x+2) = 0$$
$$x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

وينتج أن مجال الدالة $g(x)$ هو:

$$D_g = R - \{0,3,-2\}$$

(3) الدالة الجذرية

الصور العامة للدالة الجذرية:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x}$$

حيث أن $n > 1$، ومجال الدالة يعتمد على قيمة n حيث اذا كانت n عدد زوجي فان مجال هو قيم x بحيث أن $x \geq 0$، وإذا كانت n عدد فردي فإن مجال الدالة هو كل الأعداد الحقيقية R

مثـــــال (6)

هل الدوال الاتية جذرية أم لا

$$f(x) = \sqrt{2x-1}$$
$$h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3x+2}}$$
$$g(x) = \sqrt[3]{5x-8}$$
$$r(x) = (x) = \sqrt{x} + x^3$$

الحل

الدالة $f(x)$ دالة جذرية، والدالة $h(x)$ ليست دالة جذرية لأن ما تحت الجذر ليست كثيرة حدود، أما الدالة $g(x)$ فهي دالة جذرية والدالة $r(x)$ ليست جذرية لأن x^{-3} ليست دالة جذرية.

الاختبار الذاتي (16)

Self-Test (16)

اختر الإجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) مجال الدالة $f(x) = a$ هو:

a. R b. $R - \{a\}$

(ب) مجال الدالة $g(x) = 1/x$ هو

a. R b. $R - \{0\}$

(ج) الدالة $r(x) = x^2 + \sqrt{x}$ دالة جذرية

a. صواب b. خطأ

(د) مجال الدالة $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$:

a. $R - \{1,\}$ b. $R - \{1, -1\}$ c. $R - \{-1\}$

(هـ) مجال الدالة $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^n}$ هو

a. R b. $R - \{1\}$ c. $R - \{0\}$

(و) الدالة $m(x) = x^{3/2}$ دالة:

a. كثيرة حدود b. جذرية c. كسرية

(ز) الدالة $g(x) = \frac{x^3}{2}$

a. كثيرة حدود b. جذرية c. كسرية

(ح) الدالة $n(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$:

a. كثيرة حدود b. جذرية c. كسرية

تمـــــــارين
Exercises

1- اوجد مجال الدوال التالية:

a. $f(x) = 4$

b. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 7$

c. $f(x) = x$

d. $f(x) = 3 - x$

e. $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x - 2}$

f. $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x - 2}$

g. $f(x) = \frac{1}{x + 1}$

h. $y = \frac{x^2 + 3}{x^3 - 5x^2 + 6x}$

i. $y = \frac{x}{x^2 - 13x + 36}$

j. $y = \frac{x^2 + 16}{x^2 - 16}$

k. $y = \sqrt{5x + 1}$

l. $f(x) = \sqrt[3]{3x + 8}$

m. $f(x) = \sqrt{1 - x}$

n. $f(x) = \sqrt[3]{3x +}$

2- اوجد قيم الدوال عند النقطة الموضحة في المسألة

a. $f(x) = x + 3, (x = 0,1,2,-2)$

b. $f(x) = \frac{x - 5}{x^3 - 8}, (x = 0,-1,-2)$

c. $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x + 2}, (x = 0,1,2)$

d. $f(x) = \sqrt{3x + 1}, (x = 0,1,2)$

3- مثل كل من الدوال الآتية بيانياً:

a. $f(x) = 1$

b. $f(x) = x^2 - 1$

c. $f(x) = x$

d. $f(x) = x^2 - x - 2$

الباب الرابع

الدوال

even function $f(-x) = f(x)$

odd function $f(-x) = -f(x)$

odd even or neither

$f(x) = x^3 - x$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x)$

$\therefore -f(x) = f(-x) \therefore$ odd function

الفصل الثالث

الدوال الزوجية والدوال الفردية

الفصل الثاني: الدوال الزوجية والدوال الفردية

محتويات الفصل

الفصل الثالث: الدوال الزوجية والدوال الفردية

Section (3): Even and Odd Functions

الدالة الزوجية
(Even Function)

تكون دالة ما زوجية إذا تحقق الشرط:

$$f(-x) = f(x)$$

أي أن قيمة $y = f(x)$ لا تتغير إذا تم تغيير $(-x)$ بدلاً من (x)، ومثال ذلك الدوال:

$$f(x) = \cos x \ , \quad f(x) = x^2 \ , \quad f(x) = x^4$$

دوال زوجية.

الدالة الفردية
(Odd Function)

تكون دالة ما فردية إذا تحقق الشرط:

$$f(-x) = -f(x)$$

أي أن قيمة $y = f(x)$ تغير اشارتها إذا تم تغيير $(-x)$ بدلاً من (x)، ومثال ذلك الدوال:

$$f(x) = \sin x \ , \quad f(x) = x, \quad f(x) = x^3$$

دوال فردية.

إذا لم تحقق الدالة شرط ألدالة الزوجية ولا شرط الدالة الفردية، فإن الدالة ليست دالة زوجية ولا فردية.
ومثال ذلك:

$$f(x) = x + 1$$

خواص الدوال الزوجية والدوال الفردية
(Even & Odd Functions Properties)

من خواص الدوال الزوجية والدوال الفردية ما يلي:

(أ) مجموع أو فرق دالتين زوجين هو دالة زوجية
(ب) مجموع أو فرق أي دالتين فرديتين هو دالة فردية
(ج) حاصل ضرب أو قسمة دالتين زوجيتين هو دالة زوجية
(د) حاصل ضرب أو قسمة دالتين فرديتين هو دالة زوجية
(هـ) حاصل ضرب أو قسمة دالتين إحداهما زوجية والأخرى فردية هو دالة فردية


البوزجاني

هو أبو الوفاء محمد بن محمد يحي بن إسماعيل بن العباس وهو فلكي ورياضي فارسي ولد في بوزجان (إيران) عام (329هـ ـ 940م).

أهم مؤلفاته:
من الذين مهدوا للرسم الهندسي وحساب المثلثات والهندسة التحليلية ، شرح كتاب (ديوفانتس) في الجبر، أثبت القانون العام للجيب في حساب المثلثات الكروية، كتاب المدخل إلى الإثماطيقي، كتاب استخراج الأوتار، كتاب العمل بالجدول الستيني، و له إسهامات واضحة في علم حساب المثلثات.

مثـــــال (1)

اثبت أن كل من الدوال $f(x)$ ، $g(x)$ دوال زوجية، حيث:

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = |3x|$$

الحل

بالنسبة للدالة $f(x)$: عند التعويض عند قيم x مثلاً $x = -2, -1,0,1,2$

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(2) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$f(-2) = (1)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

وبالتالي فان:

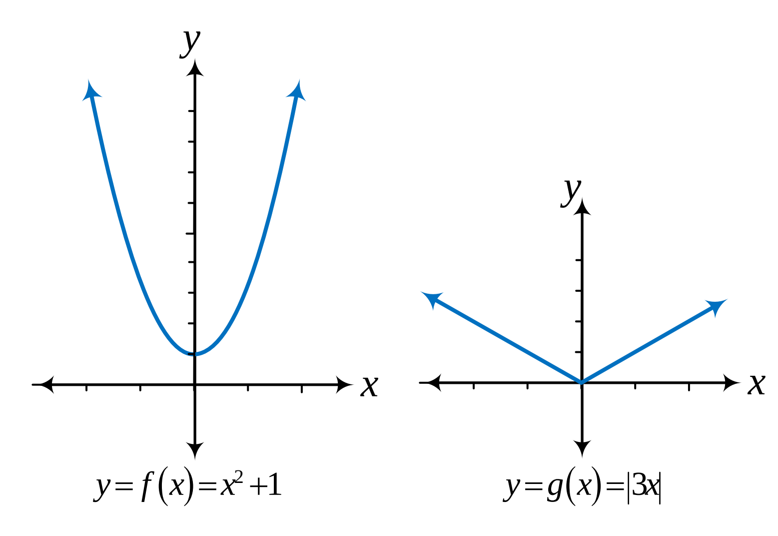
$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$$

ولذلك فإن الدالة زوجية. لاحظ من الشكل 1.3 (الجزء الأيسر) تماثل الدالة $f(x)$ حول محور y وهذا من خواص الدوال الزوجية.

أم الدالة $g(x)$: بالتعويض عن (x) بإشارة مخالفة أي $(-x)$ وباستخدام خواص دالة المقياس نجد أن:

$$f(-x) = |-3x| = |3x| = f(x)$$

وبالتالي فإن الدالة $g(x)$ دالة زوجية. أنظر الشكل 1.3 (الجزء الأيمن).



شكل 1 .3

مثـــــال (2)

اثبت ان كل من الدوال $h(x), i(x)$ دوال فردية، حيث:

$$h(x) = x^3, \qquad i(x) = 6x$$

الحل

بالنسبة للدالة $h(x)$ وبالتعويض عن (x) بالقيمة $(-x)$ نجد أن:

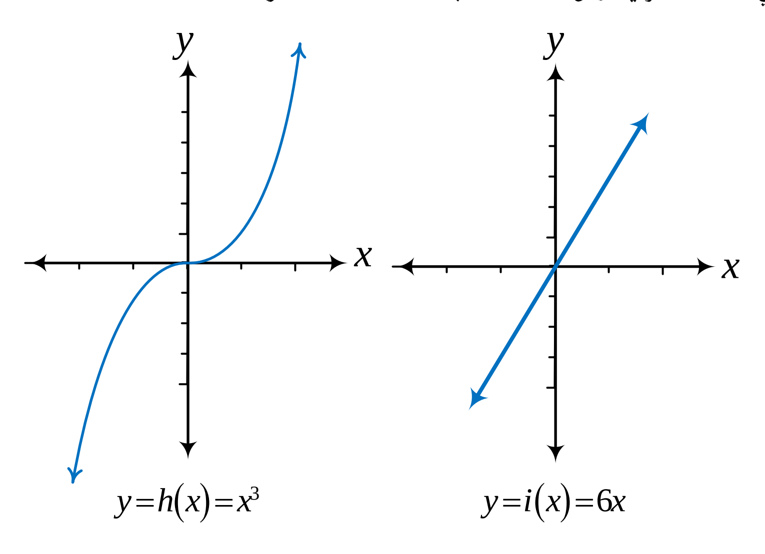
$$h(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -h(x)$$

وبالتالي فان الدالة فردية، ومن الشكل 3.3 نجد أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل وهذا من خواص الدالة الفردية.

وبالنسبة للدالة $i(x)$ وبالتعويض (x) بالقيمة $(-x)$ نجد أن:

$$f(-x) = -6x = -f(x)$$

وبالتالي فان الدالة فردية، ومن الشكل 2.3 نجد أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.



شكل 3. 2

مثـــــال (3)

بين هل الدالة $p(x)$ دالة فردية أم دالة زوجية أو غير ذلك، حيث:

$$p(x) = x + 1$$

الحل

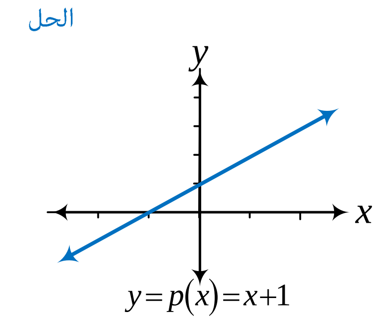
من تعريف الدالة المعطاة نجد أن:

$$p(-x) = -x + 1, \qquad -p(x) = -(x + 1)$$

للتعرف على الدالة من حيث كونها زوجية أم فردية نقوم بالتعويض عن (x) بالقيمة $(-x)$ في الدالة نجد أن:

$$p(-x) = -x + 1 \neq -p(x) \neq p(x)$$

وبالتالي فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية. وبالنظر إلى الشكل 3.3 نلاحظ أن الدالة غير متماثلة حول محور y وأيضاً غير متماثلة حول نقطة الأصل.



شكل 3. 3

مثـــــال (4)

بين هل الدالة $f(x)$ دالة فردية أم دالة زوجية أو غير ذلك، حيث:

$$f(x) = x^2 + x - 1$$

الحل

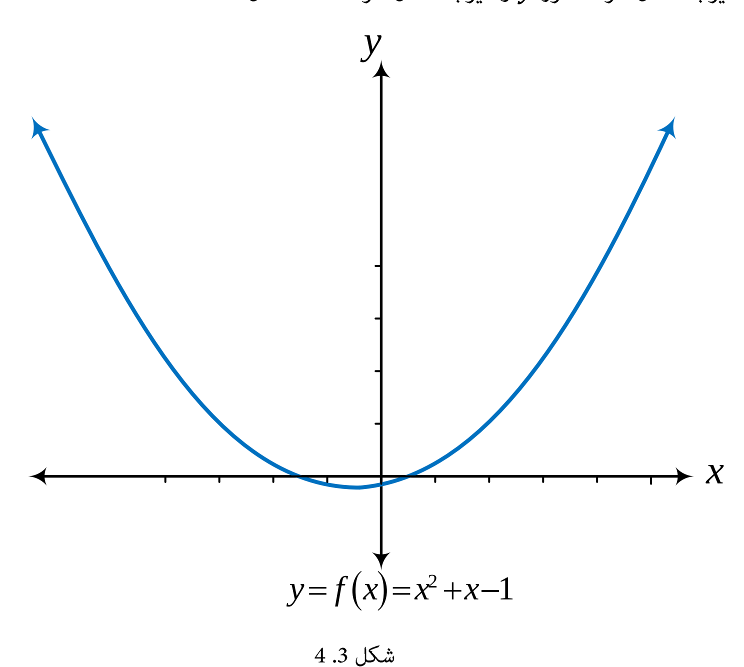
من تعريف الدالة نجد أن

$$f(-x) = (-x)^2 - x - 1 = x^2 - x - 1 \neq f(x)$$

وبالتالي فإن هذه الدالة ليست زوجية، وأيضاً:

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) - 1 = x^2 - x - 1$$
$$= -(-x^2 + x + 1) \neq -f(x)$$

أي أن الدالة ليست فردية ، ولذلك فإن هذه الدالة ليست زوجية ولا فردية وهذا يتضح أيضاً من الشكل 4.3 حيث لا يوجد تماثل حول محور y ولا يوجد تماثل حول نقطة الأصل.



شكل 4.3

الاختبار الذاتي (17)

Self-Test (17)

اختر الإجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) الدالة $f(x) = x^4 + x^2$ دالة

b. فردية

a. زوجية

(ب) الدالة $f(x) = x^3 + x$ دالة

b. فردية

a. زوجية

(ج) الدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ دالة

b. فردية

a. زوجية

(د) الدالة $f(x) = \frac{1}{x^3+x}$ دالة

c. ليست زوجية ولا فردية

b. فردية

a. زوجية

(هـ) الدالة $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ دالة

c. ليست زوجية ولا فردية

b. فردية

a. زوجية

(و) الدالة $f(x) = |x^2 - x|$:

c. ليست زوجية ولا فردية

b. فردية

a. زوجية

(ز) الدالة $f(x) = \frac{x}{x^3+x+1}$ دالة

c. ليست زوجية ولا فردية

b. فردية

a. زوجية

(ح) الدالة $f(x) = (x+5)^2 - (x-2)^3$ دالة

c. ليست زوجية ولا فردية

b. فردية

a. زوجية

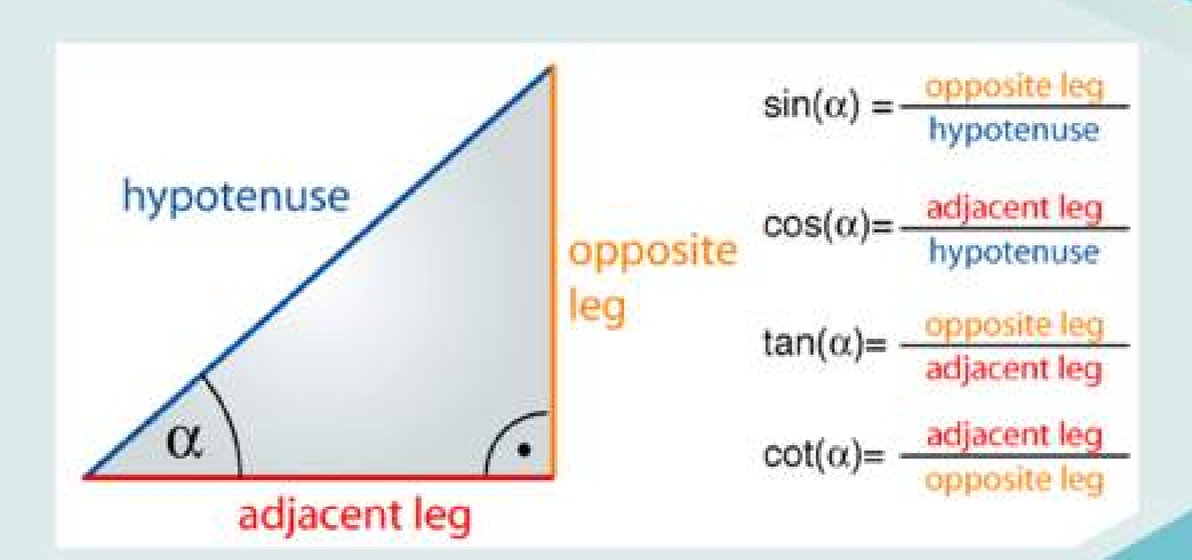
تمـــــارين
Exercises

حدد نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = -3x + 2x^2 + 4$
3. $f(x) = |x - 1|$
4. $f(x) = x^3 - 1$
5. $f(x) = \frac{1}{x - 1}$
6. $f(x) = 6x$
7. $f(x) = x + 1$
8. $f(x) = (2 + x)^2 - (2 - x)^2$
9. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
10. $f(x0) = \frac{1}{x - 3}$
11. $f(x) = x^2 + 1$
12. $f(x) = -34 + 2x^2 + 4$
13. $f(x) = 3x - 2x^3$
14. $f(x) = |3x|$
15. $f(x) = 1$
16. $f(x) = \frac{2x^3}{7}$

الباب الرابع

الدوال



الفصل الرابع

الدوال الغير جبرية

الفصل الرابع : الدوال الغير جبرية

محتويات الفصل

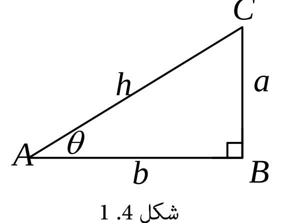
الفصل الرابع: الدوال الغير جبرية

Section (4): Transcendental Functions

سميت الدوال الغير جبرية بهذا الاسم لأنه لا يمكن تمثيل أي من هذه الدوال بكثيرة حدود منتهية هناك عدة دوال غير جبرية منها مجموعة الدوال المثلثية ومجموعة الدوال الذائدية والدوال العكسية إلخ... وسنتناول منها في هذا الفصل الدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

(1) الدوال المثلثية

(Trigonometry Functions)



شكل 4. 1

الدوال المثلثية لمثلث قائم الزاوية فيه زاوية θ زاوية حادة:

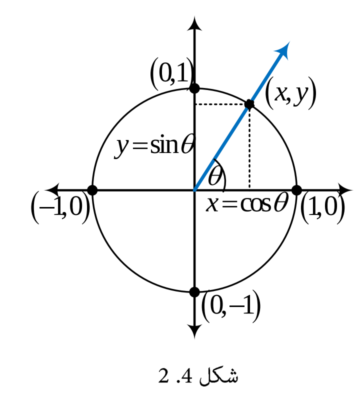
$$\sin\theta = \frac{a}{h}\ , \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{h}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{h}\ , \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{h}{b}$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b}\ , \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{b}{a}$$

الدوال الدائرية

(Circular Functions)



شكل 4. 2

هنا أسلوب أخر لتعريف الدوال المثلثية عن طريق دائرة الوحدة (الدائرة التي مركزها نقطة أصل المحورين في المستوي ونصف قطرها الوحدة) وعادة ما تسمى الدوال السابقة في هذه الحالة "الدوال الدائرية" والبعض يبقى على مسمى الدوال المثلثية. خصائص التناسب تجعل هذا التعريف مكافئ للتعريف السابق عند الاقتصار على الزوايا الحادة موجبة القياس.

إذا كان رأس الزاوية على أصل المحورين وضلعها الابتدائي على الجزء الموجب من المحور الأفقي (وهذا يسمى الوضع القياسي للزاوية) وكان ضلعها الثاني يقطع دائرة الوحدة عند النقطة (x, y) فإننا نعرف الدوال الدائرية على النحو التالي:

$$\cos\theta = x,\qquad \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0),\qquad \sec\theta = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$$

$$\sin\theta = y,\qquad \cot = \frac{x}{y}(y \neq 0),\qquad \csc\theta = \frac{1}{y}\ (x \neq 0)$$

مجال هذه الدوال هو الأعداد الحقيقية.



ابن يونس المصري

هو أبو الحسن علي بن أبي سعيد عبد الرحمن بن أحمد الصدفي المصري وهو فلكي ورياضي مصري ولد في القاهرة بمصر في منتصف القرن الرابع الهجري الموافق العاشر الميلادي، وقد عمل فلكياً بدار الحكمة في القاهرة.

أهم مؤلفاته:

ساهم كثير في الأعمال الرياضية، فقد ساهم في تقدم علوم اللوغاريتمات وتوصل لإيجاد علاقة هامة في حساب المثلثات، كان يعتمد عليها الفلكيون قبل الحساب باللوغاريتمات كما توصل بن يونس إلى معالجة عمليات معقدة في حساب المثلثات وفي الإسقاط التعامد.

تمثيل الدوال المثلثية

(Graphs of Trigonometry Functions)

جدول لقيم الدالة $\sin\theta$

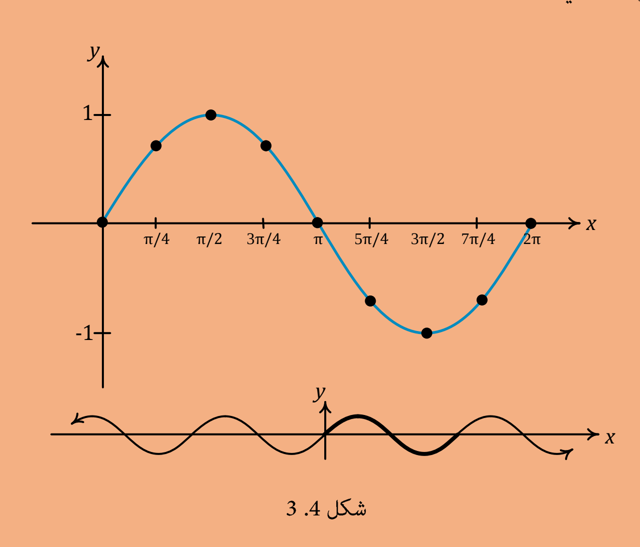
$(\theta, \sin(\theta))$	$\sin(\theta)$	θ
$(0,0)$	0	0
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	1	$\frac{\pi}{2}$
$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$(\pi, 0)$	0	π
$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$
$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	-1	$\frac{3\pi}{2}$
$\left(\frac{7\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$(2\pi, 0)$	0	2π

جدول لقيم الدالة $\cos\theta$

$(\theta, \cos(\theta))$	$\cos(\theta)$	θ
$(0,1)$	1	0
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$(\pi, -1)$	-1	π
$\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$
$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	0	$\frac{3\pi}{2}$
$\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$(2\pi, 1)$	1	2π

(أ) الدالة $\sin\theta$

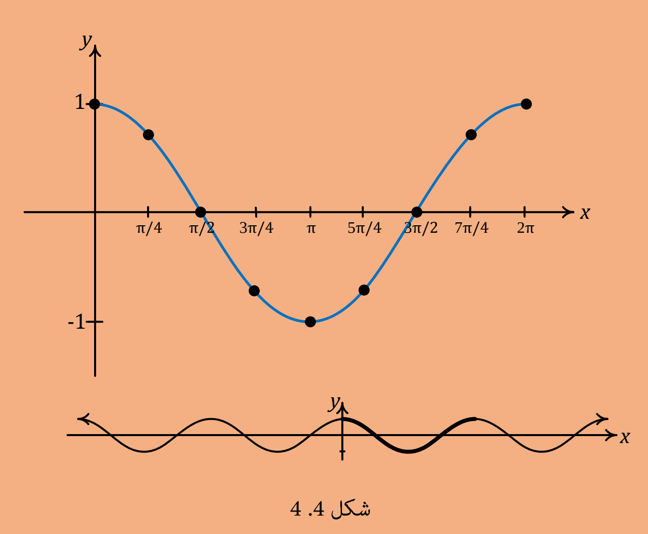
لرسم مثل هذه الدوال نقوم بتكوين جدول لقيم θ ونحسب ما يناظرها لقيم y حيث $y = \sin\theta$ ونحدد مجموعة من نقاط المنحنى ثم نقوم بالتوصيل بين هذه النقاط لنحصل على المنحنى شكل (3.4) الجزء العلوي والذي يمثل دورة واحدة من الدالة والجزء السفلي يمثل عدة دورات متتالية.



شكل 3.4

(ب) الدالة $\cos\theta$

بنفس الطريقة السابقة، حيث يمثل الجزء العلوي من شكل 4.4 دورة كاملة لدالة cos بينما الجزء السفلي عبارة عن عدة دورات متتالية.



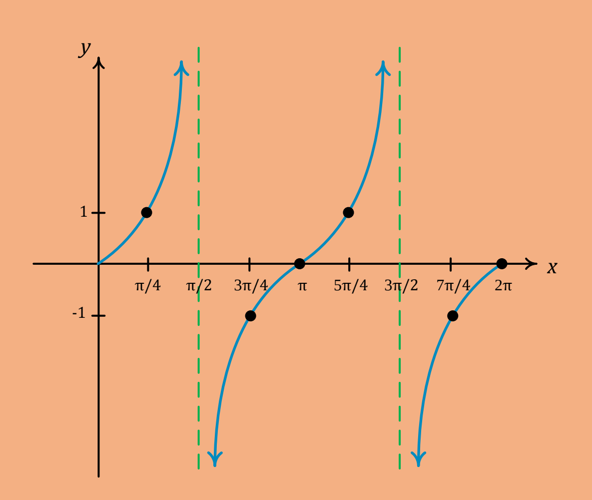
شكل 4.4

جدول لقيم الدالة $\tan\theta$

θ	$\tan(\theta)$	$(\theta, \tan(\theta))$
0	0	$(0,0)$
$\frac{\pi}{4}$	1	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$
$\frac{\pi}{2}$	غير معرفة	
$\frac{3\pi}{4}$	-1	$\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$
π	0	$(\pi, 0)$
$\frac{5\pi}{4}$	1	$\left(\frac{5\pi}{4}, 1\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	غير معرفة	
$\frac{7\pi}{4}$	-1	$\left(\frac{7\pi}{4}, -1\right)$
2π	0	$(2\pi, 0)$

(ج) الدالة $\tan\theta$

أيضاً نكون جدولاً لقيم الدالة $\tan\theta$ ثم نحدد مجموعة من النقاط ونصل بينها لنحصل على الشكل 5.4.



شكل 4. 5

جذور الدوال المثلثية
(Roots of Trigonometry Functions)

لكل واحدة جذرين في الدورة الواحدة انظر الأشكال (3.4، 4.4، 5.4) وبشكل عام فإن كلاً sin ، cos دوال دورية بدوره طولها وكلا من الدالة:

$$\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in z$$

$$\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = n\pi \quad n \in z$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = n\pi \quad n \in z$$

نستطيع تقديم صورة أخرى أكثر فائدة للدوال السابقة كما يلي sin وcos بالدالتين x, y باستبدال

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\left(\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right) \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \left(\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}(\theta \neq \cdots + n\pi) \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \ (\theta \neq \cdots + n\pi)$$

متطابقات فيثاغورث
(Pythagorean Identities)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

متطابقات التبسيط
(Simplifying Identities)

$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$, $\sin(\theta \pm \pi) = -\sin\theta$, $\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\theta$

$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$, $\cos(\theta \pm \pi) = -\cos\theta$, $\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\sin\theta$

$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$, $\tan(\theta \pm \pi) = \tan\theta$, $\tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

(2) الدالة الأسية
(Exponential Functions)

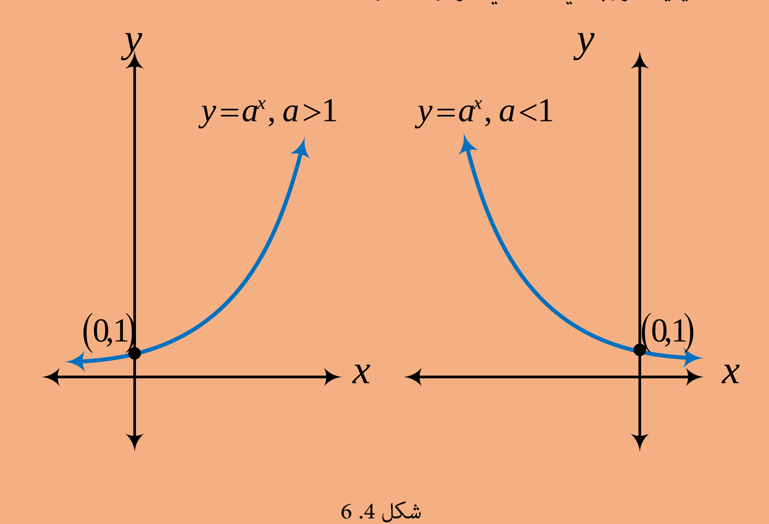
تنقسم الدالة الأسية إلى نوعين

(أ) **الدالة الاسية العامة:**

تعرف على أنها الدالة التي معادلتها على الصورة $y = f(x) = a^x$ حيث أن a عدد حقيقي موجب و $a \neq 1$ ويسمي a الأساس و x الأس، أنظر الشكل 6.4.

(ب) **الدالة الاسية الطبيعية**

هي شكل خاص من الدالة الأسية العامة وذلك عندما $a = e = 2.7182$ حيث أن e عدد قياس ومجال الدالة الأسية هو الاعداد الحقيقية $R = (-\infty, \infty)$، ومداها هو الأعداد الحقيقية الموجبة أي أن المدي هو $(0, \infty)$.



شكل 4. 6

مثـــــال (1)

بين هل الدوال الآتية تمثل دالة أسية أم لا

$$f(x) = 7^x, \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad h(x) = x^2$$

الحل

الدالة $f(x) = 7^x$ دالة أسية لأن الأساس $a = 7$ ثابت، المتغير x هو الأس.

الدالة $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ دالة أسية لأن الأساس $a = \frac{1}{2}$ ثابت ، المتغير x هو الأس.

الدالة $h(x) = x^2$ ليست دالة أسية لأن الأساس $a = x$ هو ليست ثابت والأس يساوي 2 وهو عدد ثابت.

(3) الدالة اللوغاريتمية

(Logarithmic Function)

إذا كانت الدالة الأسية $x = a^y$ بأخذ لوغاريتم الطرفين فإن

$$y = \log_a x$$

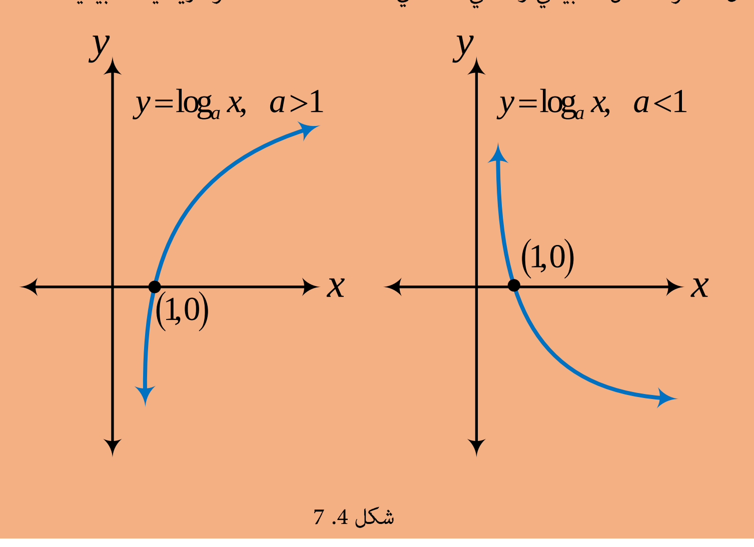
نسمي هذه الدالة بالدالة اللوغاريتمية، حيث يسمي a أساس الدالة اللوغاريتمية هو موجب، $a \neq 1$

حالة خاصة للدال اللوغاريتمية:

عندما يكون الأساس $a = e$ فان الدالة اللوغاريتمية تكون على الشكل:

$$y = f(x) = \log_a x = \ln x$$

حيث أن e هو الأساس الطبيعي وتسمي الدالة في هذه الحالة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية.



شكل 4. 7

ملحوظة (1)

إذا كان الأساس 10 فان

$$\log_a x = \log x$$

ومجال الدالة اللوغاريتمية هو $(0, \infty)$

ومداها هي الأعداد الحقيقية

$$R = (-\infty, \infty)$$

خصائص اللوغاريتمات

(Logarithms Properties)

$$\log_a(xz) = \log_a x + \log_a z$$

$$\log_a\left(\frac{x}{z}\right) = \log_a(x) - \log_a z$$

$$\log_a(x^n) = n\log_a x$$

$$\log_a(x^n) = 1$$

$$\log_a(1) = 0$$

مثـــــال (2)

أوجد قيمة اللوغاريتم في كل مما يلي:

(1) $\log 10$

(2) $\log 1000$

(3) $\log_4(64)$

(4) $\log_8(8)$

(5) $\log_6(1)$

(6) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

الحل

$(1)\ \log 10 = 1$

$(2)\ \log 1000 = \log(10)^3 = 3\log 10 = 3$

$(3)\ \log_4(64) = \log_4(4)^3 = 3\log_4 4 = 3$

$(4)\ \log_8(8) = 1\ (8^1 = 8)$

$(5)\ \log_6(1) = 0\ (6^0 = 1)$

$(6)\ \log_3\left(\frac{1}{27}\right) = \log_3(3)^{-3} = -3$

مثـــــال (3)

أوجد قيم كل مما يلي:

(1) $\log_3\sqrt{3} + \log_9 3 + \log_5\sqrt{5}$

(2) $\ln 25 - \ln 125$

(3) $\ln 35 - \ln 7 + \ln 10 - \ln 2$

الحل

$(1)\ \log_3(3)^{\frac{1}{2}} + \log_9(9)^{\frac{1}{2}} + \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$(2)\ \ln(5)^2 - \ln(5)^3 = 2\ln 5 - 3\ln 5 = -\ln 5$

$$(3)\ \ln 35 - \ln 7 + \ln 10 - \ln 2 = \ln\left(\frac{35}{7}\right) + \ln\left(\frac{10}{2}\right) = \ln 5 + \ln 5 = 2\ln 5$$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

(Exponential and Logarithmic Equations)

بما أن الدالة الأسية مكونة $x = a^y$ فان اللوغاريتمية $\ln_a x = y$ ولحل المعادلات الأسية أو المعادلات اللوغاريتمية يجب الأخذ في الاعتبار قاعدتين هامتين:

القاعدة الأولى:

إذا كان الأساس مساوياً للأساس فإن الأس سيكون مساوياً للأس، أي أن:

$$\because\ a^m = a^n \qquad \therefore\ m = n$$

حيث

$$a > 0, \qquad a \neq 1$$

القاعدة الثانية:

إذا كان الأس مساوياً للأس فأن الأساس سيكون مساوياً للأساس، أي أن

$$x^m = y^m$$

وكان m عدد فردي لا يساوى الصفر فإن:

$$x = y$$

مثـــــال (4)

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

(1) $(3)^{4x+2} = 81$

(2) $4(3^x) = 36$

(3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-2} = (49)^{2x-1}$

الحل

(1)
$$(3)^{4x+2} = (3)^4$$
$$4x + 2 = 4$$
$$4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(2)
$$4(3^x) = 36$$
$$(3^x) = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow (3^x) = (3)^2 \Rightarrow x = 2$$

(3)
$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-2} = (49)^{2x-1}$$
$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-2} = (7)^{2(2x-1)}$$
$$(7^{-1})^{5x-2} = (7)^{4x-2}$$
$$(7)^{-5x+2} = (7)^{4x-2}$$

ومن ذلك ينتج أن:

$$9x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

نلاحظ في الثلاثة أجزاء حاولنا وضع المسألة على صورة إحدى القاعدتين السابقتين

مثـــــال (5)

أوجد قيمة x في كل مما يلي:

(1) $\log_x 125 = 3$

(2) $\log_4 16 = x$

(3) $\log_2(x+5) = 3$

الحل

(1) $\log_x 125 = 3 \Rightarrow 125 = x^3$
$$(5)^3 = x^3 \Rightarrow x = 5$$

(2) $\log_4 16 = x \Rightarrow 16 = 4^x$
$$(4)^2 = (4)^x \Rightarrow x = 2$$

(3) $log_2(x+5) = 3 \Rightarrow (x+5) = (2)^3 = 8$
$$x = 8 - 5 = 3$$

أيضاً في هذا المثال نلاحظ في الثلاثة أجزاء حاولنا وضع المسألة على صورة إحدى القاعدتين السابقتين

الاختبار الذاتي (18)
Self-Test (18)

اختر الإجابة الصحيحة في كل ما يلي:

(أ) قيمة $\log 200$ يساوى

a. 2 b. 1 c. 4

(ب) قيمة $\log_4(4 \times 16)$ يساوى

a. 4 b. 3 c. 5

(ج) قيمة $\log_5(125)$ يساوي

a. 5 b. 2 c. 3

(د) قيمة $\ln 125 - \ln 25$ يساوي

a. 5 b. $\ln 5$ c. $-\ln 5$

(هـ) مجال الدالة $f(x) = 2e^x$ هو

a. R الاعداد الحقيقية b. $(0, \infty)$ c. $(-\infty, 0)$

(و) قيمة x من المعادلة $(3)(2^x) = 12$ هي

a. 2 b. 3 c. 1

(ز) قيمة x من المعادلة $\log_4 x = 12$ هي

a. 10 b. 14 c. 64

(ح) قيمة x من المعادلة $\log_4(125) = \frac{3}{2}$ هي

a. 25 b. 5 c. 15

تمـــــــارين

Exercises

1. أوجد مجال الدوال الاتية:

a. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = 3^x$

c. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d. $f(x) = \ln(x+3)$

e. $f(x) = \log_2(x-1)$

f. $f(x) = se^{-x}$

2. بسط ما يلي:

a. $\log_4(4x3)$

b. $\log_2(125)$

c. $\ln 125 + \ln 25$

d. $\log_5(5x+3) + \log_5 2$

e. $\log_2 32 + \log_2 36 - \log_2 625$

f. $\log_5 \sqrt{5} + \log_4 2 + \log_y 3$

g. $\log_6 \frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt{6}}$

h. $\ln 28 - \ln 7 + \ln 17 - \ln 2$

3. أوجد قيمة x في مما يلي:

a. $2^{x-1} = 16$

b. $\log_x 64 = 3$

c. $\log_8(x+3) = \frac{1}{3}$

d. $\log 5 + \log x = 2$

e. $\log_x 125 = \frac{3}{2}$

f. $\log_4 x = 3$

تمارين عامة

الهدف من هذا الباب

في هذا الجزء مجموعة من التمارين العامة تشمل جميع مواضيع الكتاب والهدف منها تدريب الطالب على الاختبارات العامة لتقييمه بشكل عام وتعرفه مدى فهمه لمواضيع الكتاب.



بعد الانتهاء من مجموعة التمارين يجب عليك
تقييم نفسك ومراجعة ما لم تعرفه مع أصدقائك أو مع مسئول المادة
وفي حالة عدم معرفتك لأي سؤال، لا تخجل من مراجعته مع أي شخص تثق في قدرته على مساعدتك
لأن الغرض النهائي هو معرفتك وفهمك للمواضيع، آملين من الله عز وجل النجاح ودوام التفوق.

تمارين عامة

General Exercies

(1) تبسيط المقدار

$$\sqrt[3]{x}\left(2x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{3}}\right)$$

(a) $-2x^2$ (b) $2x-4x^{\frac{5}{9}}$ (c) $2x-4x^{\frac{5}{3}}$ (d) $2x-4x^2$

---

(2) تبسيط المقدار

$$\left(\frac{35x^3y^5}{8xyz}\right)\left(\frac{16t^2}{7xy^4}\right)$$

(a) $10xy^4z$ (b) $10xz$ (c) $7x^2y^8z^3$ (d) $10xyz^2$

---

(3) المقدار

$$\log_5(125)-\log_2(16)+\log_4(64)$$

(a) 10 (b) 8 (c) 4 (d) 2

---

(4) إذا كانت $9x = 11x$، فإن قيمة x

(a) 2 (b) 2 (c) 20 (d) 1

---

(5) تبسيط المقدار

$$\left(\frac{x^2-8}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x^2+2x+4}\right)$$

(a) x^2+1 (b) $x-1$ (c) $x+1$ (d) x^2-1

---

(6) حل النظام

$$3x+y=2,\qquad 2x-y=3$$

هو

(a) $x=1\,,y=-1$ (b) $x=-1\,,y=1$ (c) $x=1\,,y=1$ (d) $x=-1\,,y=-1$

---

(7) إذا كان:

$$f(x) = \log_8(x)$$

فإن

$$f\left(\frac{1}{8}\right)$$

(a) 1 (b) $\frac{1}{8}$ (c) 0.1 (d) -1

---

(8) إذا كان:

$$f(x) = \log_8(x^2)$$

فإن:

$$f(9)$$

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) -2

---

(9) إذا كانت:

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

فإن قيم x هي:

(a) $4,2$ (b) $8,1$ (c) $-8,-1$ (d) $-4,-2$

---

(10) إذا كانت:

$$\log_x(32) = 5$$

فإن قيمة x هي:

(a) 2 (b) 32 (c) 5 (d) 10

---

(11) قيمة المقدار:

$$13 - 4 + 7 + 2 - 1$$

(a) 18 (b) 17 (c) -18 (d) -17

---

(12) قيمة المقدار:

$$\log(40) + \log(10) - \log(4)$$

(a) 0 (b) 2 (c) -2 (d) 4

تمارين عامة

(13) المقدار:

$$(x+3)(x-4)$$

(a)	$2x-1$	(b)	$2x-12$	(c)	x^2+x-12	(d)	x^2-x-12

(14) إذا كانت:

$$4x^2-36=0$$

فإن قيمة x هي:

(a)	± 3	(b)	± 2	(c)	$3,1$	(d)	9

(15) قيمة المقدار:

$$\log_{25}(5)$$

(a)	$\frac{1}{2}$	(b)	2	(c)	-2	(d)	5

(16) تبسيط المقدار

$$(x^2+1)(x-1)(x+1)$$

(a)	$(x^2-1)^2$	(b)	x^4-1	(c)	x^4+1	(d)	$(x^2+1)^2$

(17) فك المقدار الجبري

$$(x+y)^2$$

(a)	$2x^2y^2$	(b)	$x^2+2xy+y^2$	(c)	x^2+y^2	(d)	$x^2-2xy+y^2$

(18) معادله المستقم الذي ميله $m=0$ ويقطع جزء من محور الصادات قدرة $c=3$ هي:

(a)	$y=3$	(b)	$x=3$	(c)	$y=x+3$	(d)	$x=y+3$

(19) ميل المستقم الذي معادلته $y-x=41$ هو:

(a)	$m=41$	(b)	$m=1$	(c)	$m=-41$	(d)	$m=-1$

(20) إذا كان $3^x=27$، فإن قيمة x

(a)	4	(b)	3	(c)	9	(d)	14

(21) تحليل المقدار:

$$x^2 - 13x + 12$$

(a) $(x-4)(x-3)$ (b) $(x+4)(x+3)$ (c) $(x-1)(x-12)$ (d) $(x-6)(x-2)$

---

(22) المقدار

$$\frac{x-y}{9-3}$$

(a) $\frac{x}{9}-\frac{y}{3}$ (b) $\frac{x}{6}-\frac{y}{6}$ (c) $\frac{x-y}{9}-\frac{x-y}{3}$ (d) $\frac{x}{9}+\frac{y}{3}$

---

(23) المقدار

$$(5-4x)^2$$

(a) $25+16x^2$ (b) $25-40x+16x^2$ (c) $25-16x^2$ (d) $25+40x+16x^2$

---

(24) تبسيط المقدار

$$(x^2y^2)^2\left(\frac{x}{y}\right)^5$$

(a) x^9y^{-1} (b) $\frac{x}{y}$ (c) $x^{-9}y$ (d) $\frac{y}{x}$

---

(25) تبسيط المقدار

$$(24 \div 6 + 22 - 3)$$

(a) 5 (b) -5 (c) -3 (d) 23

---

(26) تبسيط المقدار

$$(x^2y^2)^2\left(\frac{x}{y}\right)^5$$

(a) x^9y^{-1} (b) $\frac{x}{y}$ (c) $x^{-9}y$ (d) $\frac{y}{x}$

تمارين عامة

(27) تبسيط المقدار

$$\left(\frac{x^3-1}{x-5}\right)\left(\frac{x^2+3x-10}{x^2+x+1}\right)$$

(a) $x-1$ (b) $(x-1)(x+2)$ (c) $x-2$ (d) $(x-1)(x-2)$

---

(28) إذا كان $\log_3(81) = x$, فإن قيمة x هي:

(a) 27 (b) 4 (c) 27 (d) 9

---

(29) إذا كان $-2x - 15 = -3x$ ، فإن قيمة x هي:

(a) 15 (b) 3 (c) 5 (d) -3

---

(30) تبسيط المقدار

$$\frac{2x^3z^2y^{-1}}{xz^3y^{-2}}$$

(a) $2x^2zy^{-1}$ (b) $2x^2zy$ (c) $2x^2yz^{-1}$ (d) $2x^2z^{-1}y^{-1}$

---

(31) حل النظام هو

$$2x-3y=7, \qquad 9x+3y=15$$

(a) $x=-2\,, y=-1$ (b) $x=-1\,, y=-2$ (c) $x=1\,, y=2$ (d) $x=2\,, y=-1$

---

(32) قيمة

$$\log(100)$$

(a) 100 (b) 2 (c) 0 (d) 10

---

(33) مفكوك المقدار

$$xy(x-3y)$$

(a) $-2xy$ (b) x^2y-3xy^2 (c) $-x^2y^2$ (d) x^2y-3y

---

(34) إذا كان:

$$x^2 - 4x = 0$$

فإن قيم x هي:

(a) $4,1$ (b) $2,0$ (c) $4,0$ (d) ± 2

---

(35) إذا كان:

$$f(x) = \frac{x-1}{2}$$

فإن قيمة $f(1)$ هي:

(a) 1 (b) 0 (c) $x-2$ (d) $x+2$

---

(36) قيمة المقدار

$$\log_5(25) + \log_5(15) - \log_5(3)$$

(a) $3 - 2\log_5 3$ (b) 17 (c) 3 (d) 11

---

(37) إذا كانت:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

فإن قيمة $f(16)$ هي:

(a) 8 (b) 2 (c) 4 (d) -4

---

(38) إذا كان:

$$\frac{(x)(x)}{x+x} = 2$$

فإن قيمة x هي:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) 1 (d) 4

تمارين عامة

(39) إذا كان:

$$\sqrt[3]{\sqrt{x^{12}}}$$

(a) x^4	(b) x^2	(c) $\sqrt[36]{x}$	(d) x^3

(40) إذا كان

$$(4)^{\frac{3}{2}}$$

(a) 64	(b) $2\sqrt{2}$	(c) 8	(d) 24

(41) الصيغة الاسية التالية $10^3 = 1000$ تكافئ الصيغة اللوغاريتمية

(a) $\log 1000 = 3$	(b) $\log_3 1000 = 3$	(c) $\log_3 3 = 1000$	(d) $\log 3 = 1000$

(42) المستقم الذي معادلته $y - 8 = 0$ يقطع من محور الصادات جزء قدرة

(a) 0	(b) -8	(c) 8	(d) 1

(43) تبسيط المقدار

$$\frac{2x^4 + x}{x}$$

(a) $2x^2 + x^{-1}$	(b) $2x^3 + 1$	(c) $2x^4$	(d) $2x^3 + x$

(44) مجال تعريف الداله

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2}$$

هو $R - \{0\}$

(a) صواب	(b) خطأ

(45) المقدار

$$x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$$

(a) صواب	(b) خطأ

(46) إذا كانت:

$$f(x) = \frac{1-x}{x-1}$$

فإن: $f(-1) = 0$

(a) صواب (b) خطأ

---

(47) العبارة الجبرية

$$\log_a x = y \Leftrightarrow y = a^x$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(48) ميل المستقم الذي معادلته:

$$3y = 12x - 5$$

هو $m = 4$

(a) صواب (b) خطأ

---

(49) إذا كانت:

$$(x+2)^2 = 0$$

فإن قيمة $x = 2$

(a) صواب (b) خطأ

---

(50) هل:

$$x^{-6} = \frac{6}{x}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(51) الداله:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

هي داله جذرية.

(a) صواب (b) خطأ

تمارين عامة

(52) إذا كانت $f(x) = -7$ فإن: $f(-3) = -7$

(a) صواب (b) خطأ

---

(53) المقدار:

$$\log_3 1 + \log_3 3 = 1$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(54) المقدار:

$$40 \div 10 \times 2 - 2 + 1 = 7$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(55) المقدار:

$$x^3 - 5x = x^2(x - 5)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(56) الصورة العامة لمعادله الدرجة الثانية في مجهول واحد هي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(57) الداله:

$$f(x) = \frac{x^5 - 3x^2 + 17x + 11}{x^2 + 22}$$

هي داله كسرية.

(a) صواب (b) خطأ

---

(58) الداله:

$$f(x) = \left(\frac{5}{11}\right)^x$$

هي داله أسية.

(a) صواب (b) خطأ

---

(59) المقدار:

$$\left(\sqrt{x-y}\right)^2 = x^2 - y^2$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(60) المقدار:

$$-2(x-3) = 2x - 3$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(61) المقدار:

$$y^2 y^{-3} = y^{-6}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(62) مجال تعريف الداله:

$$f(x) = x^2 - 1$$

هو $R - \{1\}$

(a) صواب (b) خطأ

---

(63) المقدار:

$$\sqrt{4a} = 2a$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(64) المقدار:

$$(a^m)^n = a^{m+n}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(65) المقدار:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$$

(a) صواب (b) خطأ

تمارين عامة

(66) الداله:

$$f(x) = x^2$$

هي داله كثيرو حدود.

(a) صواب (b) خطأ

---

(67) المقدار:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x + y)^2$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(68) لتكن:

$$f(x) = \sqrt{13}$$

فإن قيمة $f(-2)$ تكون غير معرفة.

(a) صواب (b) خطأ

---

(69) إذا كانت:

$$f(x) = x$$

فإن $f(-5) = 5$

(a) صواب (b) خطأ

---

(70) المقدار:

$$\sqrt{144} = \sqrt{100} + \sqrt{44}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(71) مجال تعريف الداله:

$$f(x) = \sqrt{8}$$

هو R

(a) صواب (b) خطأ

---

(72) مجال تعريف دوال كثيرات الحدود هو R

(a) صواب (b) خطأ

---

(73) الداله:

$$f(x) = \sqrt{x} + 4$$

هي كثيرة حدود من الدرجة $\frac{1}{2}$.

(a) صواب (b) خطأ

---

(74) إذا كانت:

$$f(x) = x^3 - 1$$

فإن قيمة $f(-1) = 0$.

(a) صواب (b) خطأ

---

(75) مجموع مربعين $(x^2 + y^2)$ لا يمكن تحليله في R

(a) صواب (b) خطأ

---

(76) المقدار:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} = \frac{a^m}{b^n}, \qquad (b \neq 0)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(77) المقدار:

$$\frac{1}{5x^3} = 5x^{-3}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(78) الداله:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

هي داله جذرية

(a) صواب (b) خطأ

تمارين عامة

(79) المقدار:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\,, \qquad (y \neq 0)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(80) المقدار:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(81) المقدار:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(82) المقدار:

$$\frac{x^5}{x^8} = x^3$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(83) المقدار:

$$\sqrt[7]{x} = x^{-7}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(84) الداله:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 13}{x^2 + 7}$$

هى داله كسرية.

(a) صواب (b) خطأ

---

(85) الداله:

$$f(x) = x + 9$$

هى داله خطية.

(a) صواب (b) خطأ

---

(86) إذا كانت $x \neq 0$ فإن:

$$\frac{x}{x} = x^0$$

هى داله خطية.

(a) صواب (b) خطأ

---

(87) المقدار:

$$\left(\sqrt{x}\right)^5 = x^2\sqrt{x}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(88) الداله:

$$f(a) = 5^a$$

هى داله لوغاريتمية.

(a) صواب (b) خطأ

---

(89) المقدار:

$$(a+1)^3 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(90) المقدار:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(91) إذا كانت $x \neq 0$ فإن:

$$\log_a(x^0) = 0$$

(a) صواب (b) خطأ

تمارين عامة

(92) إذا كان $y \neq a^x$ فإن:

$$\log_a(y) = x$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(93) ميل المستقيم:

$$y = ax + c$$

هو $m = a$

(a) صواب (b) خطأ

---

(94) ميل المستقيم:

$$2y = 4x + 5$$

هو $m = 4$

(a) صواب (b) خطأ

---

(95) ميل المستقيم:

$$y = ax + c$$

هو $m = x$

(a) صواب (b) خطأ

---

(96) إذا كان n عددا فرديا فإن:

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(97) العدد $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي (غير قياسي):

(a) صواب (b) خطأ

---

(98) المقدار:

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(99) الفترة:

$$[-3,1] \cup (-1,3) = [-3,3)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(100) المقدار:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^n$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(101) المقدار:

$$x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^2$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(102) المقدار:

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(103) المقدار:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(104) قيمة المقدار:

$$(3 \times 3) + (12 \div 3)$$

(a) 10 (b) 6 (c) 8 (d) 9

---

(105) قيمة المقدار:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}}$$

(a) $5^{\frac{2}{3}}$ (b) $\sqrt[6]{5}$ (c) 1 (d) $\sqrt[5]{5}$

تمارين عامة

(106) قيمة المقدار:

$$\frac{4}{7}+\frac{5}{3}$$

(a) $\frac{12}{30}$ (b) $\frac{12}{35}$ (c) $\frac{20}{21}$ (d) $\frac{35}{12}$

---

(107) تبسيط المقدار:

$$\frac{3x^3-4x^2+6x}{x}$$

(a) $3x^2-4x+6$ (b) $x^2-3x+6x$ (c) $3x^3-4x^2+6$ (d) $x^6-3x^3+x^2$

---

(108) تبسيط المقدار:

$$\sqrt[3]{27x^{15}y^9}$$

(a) $3x^5y^3$ (b) $3x^5y^2$ (c) $9x^5y^2$ (d) $9x^5y^3$

---

(109) قيمة المقدار:

$$12-3+4-2$$

(a) 5 (b) 33 (c) -5 (d) 11

---

(110) تبسيط المقدار:

$$\frac{x+y}{xy}$$

(a) 2 (b) 1 (c) $x+y$ (d) $x^{-1}+y^{-1}$

---

(111) تبسيط المقدار:

$$x^2(x^3-3x+1)$$

(a) x^6-3x^2+1 (b) $x^6-3x^3+x^2$ (c) $x^5-3x^3+x^2$ (d) x^5-3x^3+1

---

(112) تبسيط المقدار:

$$(5x^6-3x^2-7)-(3x^9-2x^2-3)$$

(a) $2x^{12}-x^4-4$ (b) $8x^6-5x^2-10$ (c) $2x^6-x^2+4$ (d) $2x^6-x^2-4$

---

(113) قيمة المقدار:

$$\frac{5}{7}+\frac{3}{2}$$

(a) $\frac{31}{14}$ (b) $\frac{8}{9}$ (c) $\frac{13}{14}$ (d) $\frac{8}{14}$

---

(114) تبسيط المقدار:

$$\left(\frac{9x^5y^4}{3x^3y}\right)^2$$

(a) $3x^2y^3$ (b) $3x^4y^6$ (c) $9x^4y^6$ (d) $9x^2y^3$

---

(115) تبسيط المقدار:

$$\sqrt{9x^4}$$

(a) $9x^2$ (b) $3x^3$ (c) $3x$ (d) $3x^2$

---

(116) تبسيط المقدار:

$$(x-3)(x+7)$$

(a) $x^2-4x-21$ (b) $x^2-4x+21$ (c) $x^2+4x-21$ (d) $x^2+4x+21$

---

(117) قيمة المقدار:

$$3^{-2}$$

(a) 5 (b) $\frac{1}{9}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$

---

(118) تحليل المقدار:

$$x^3+1=(x+1)(x^2+x-1)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(119) المستقيم الذي معادلته $4y=2x+20$ يقطع من محور y جزء قدره 20

(a) صواب (b) خطأ

تمارين عامة

(120) تبسيط المقدار:

$$\frac{x^2}{x-3} \div \frac{x^2}{x^2-9} = x+3$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(121) تبسيط المقدار:

$$x^2 - 7x = x(x-7)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(122) تبسيط المقدار:

$$x^2 + 5x + 6 = (x-2)(x+3)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(123) حل المعادله $3x + 2 = 11$ هو $x = 3$

(a) صواب (b) خطأ

---

(124) حل المعادله $x^2 = a$ هو $x = \pm\sqrt{a}$

(a) صواب (b) خطأ

---

(125) حل المعادله $ax^2 + bx + c = 0$ بحيث $a \neq 0$ هو

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(126) إذا كان المستقيمان $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$ متعامدان فإن:

$$\left(m_1 = -\frac{1}{m_2}\right)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(127) تحليل المقدار الثلاثي:

$$x^2 - 10x + 16$$

(a) $(x+2)(x+8)$ (b) $(x+4)(x+4)$ (c) $(x-4)(x-4)$ (d) $(x-2)(x-8)$

---

(128) ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3,5)$, $(10,8)$ يساوى:

(a) $\frac{3}{7}$ (b) 1 (c) $\frac{7}{3}$ (d) $\frac{13}{3}$

---

(129) تبسيط المقدار:

$$\frac{x^2-16}{(x+4)^2}\times\frac{x+4}{x-4}$$

(a) 1 (b) $x-4$ (c) $x+4$ (d) -1

---

(130) إذا كانت $x^2 = 25$ فإن

(a) $x = 5$ (b) $x = \pm 5$ (c) $x = -5$ (d) المعادلة ليس لها حل في R

---

(131) معادله المستقم الذي ميله 3 ويقطع من محور Y الصادات السالب جزء قدره 3 هي

(a) $y = -3x + 3$ (b) $y = 3x - 3$ (c) $y = -3x - 3$ (d) $y = 3x + 3$

---

(132) حل نظام المعادلات $3x + y = 2\,, 2x - y = 3$ هو

(a) $x = -1, y = 1$ (b) $x = 1, y = -1$ (c) $x = -1, y = -1$ (d) $x = 1, y = 1$

---

(133) إذا كانت $x^2 - 7x = 0$ فإن x تساوى:

(a) 0 (b) 7 (c) $0,7$ (d) $0, -7$

---

(134) حل المعادله $2x^2 - 5x - 7 = 0$ هو x يساوى:

(a) $-\frac{7}{2}, -1$ (b) $\frac{7}{2}, 1$ (c) $\frac{7}{2}, -1$ (d) $-\frac{7}{2}, 1$

---

(135) حل المعادله $7x - 4 = 7 - 4x$ هو x يساوى:

(a) 4 (b) 7 (c) 1 (d) 0

---

(136) حل المعادله $3x = x$ هو x يساوي:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 3

---

(137) ميل المستقيم الذي معادلته هي $y = 2$ يساوي:

(a) 0 (b) 2 (c) -2 (d) 1

---

(138) إذا كانت $(x + 4)^2 = 0$ فإن قيمة x يساوي:

(a) 2 (b) -2 (c) 4 (d) -4

---

(139) تحليل المقدار:

$$x^3 + 7x$$

(a) $10x$ (b) $x^2(x + 7)$ (c) $8x^2$ (d) $x(x^2 + 7)$

---

(140) تحليل المقدار:

$$4x^2 + 4x - 24$$

(a) $4(x - 3)(x + 2)$ (b) $4(x + 3)(x - 2)$ (c) $4(x - 3)(x - 2)$ (d) $4(x + 3)(x + 2)$

---

(141) قيمة المقدار:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{15}{6}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(142) العلاقة $\{(1,1), (2,2), (6,6)\}$ يمثل داله

(a) صواب (b) خطأ

---

(143) قيمة المقدار:

$$(\sqrt{5})(\sqrt{5}) = 5$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(144) الفترة:

$$[-2,1) \cup [-1,4) = [-1,1)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(145) قيمة المقدار:

$$\log_5(x+y) = (\log_5 x)(\log_5 y)$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(146) المقدار:

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(147) المقدار:

$$6(x-1) = 6x - 6$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(148) المقدار:

$$\sqrt{9x^4} = 3x^4$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(149) الداله

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x^2+4}}$$

هي داله جذرية

(a) صواب (b) خطأ

---

(150) الداله

$$f(x) = x^5$$

هي داله أسية.

(a) صواب (b) خطأ

---

(151) المقدار:

$$(1)^0 = 1$$

(a) صواب (b) خطأ

تمارين عامة

(152) الداله

$$f(x) = 8$$

هي داله فردية.

(a) صواب (b) خطأ

---

(153) المقدار:

$$\log_3 3 = 1$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(154) المقدار:

$$\log_6 x^3 = \left(\frac{1}{3}\right)\log_6 x$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(155) المقدار:

$$\log_2 1 = 0$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(156) مجال الداله

$$f(x) = x^2 - \frac{3}{4}$$

هو مجموعة الإعداد الحقيقية R

(a) صواب (b) خطأ

---

(157) المقدار:

$$x^2x^2 = x^4$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(158) المقدار:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(159) فك المقدار:

$$(x+y)^2$$

(a) $x^2+2xy-y^2$ (b) x^2+xy+y^2 (c) $x^2+2xy+y^2$ (d) $x^2-2xy-y^2$

---

(160) تبسيط المقدار:

$$\frac{25x^5y^4}{25x^3y}$$

(a) $25x^2y^3$ (b) $5x^3y^2$ (c) x^2y^3 (d) $5x^8y^5$

---

(161) إذا كانت $x^2-2x=0$ فإن قيمة x تساوى:

(a) $0,2$ (b) $0,-2$ (c) $-2,2$ (d) $1,2$

---

(162) تبسيط المقدار:

$$\frac{x-5}{x^2-25} \div \frac{1}{x+5}$$

(a) $x-5$ (b) 1 (c) $x+5$ (d) 0

---

(163) إذا كان ميل المستقم يساوي 7 فإن ميل المستقم العمودي عليه يساوي:

(a) $\frac{1}{7}$ (b) $-\frac{1}{7}$ (c) -7 (d) 7

---

(164) إذا كان لدينا المعادلتين

$$3x+y=4\,, \qquad -3x+y=-2$$

فإن

(a) $y=3, x=1$ (b) $y=1, x=3$ (c) $y=1, x=1$ (d) $y=3, x=3$

---

(165) الداله

$$f(x)=\frac{2x+4}{x^3}$$

هي داله

(a) كسرية (b) كثيرة حدود (c) جذرية (d) اسية

تمارين عامة

(166) إذا كانت

$$f(x) = 12x + 3$$

فإن $f(0)$ تساوي:

(a) 0 (b) 3 (c) 15 (d) 12

---

(167) الداله

$$f(x) = x^2 - 2x^2$$

هي داله:

(a) فردية (b) زوجية (c) زوجية وفردية (d) ليست زوجية أو فردية

---

(168) المستقم الذي معادلته

$$y - 15 = 6x$$

يقطع من محور الصادات y جزء قدره:

(a) 5 (b) 6 (c) 15 (d) -6

---

(169) مجال الداله

$$f(x) = \sqrt{x - 6}$$

(a) $(-\infty, 6)$ (b) $R - \{6\}$ (c) $[6, \infty)$ (d) R

---

(170) إذا كانت

$$2^{3x-2} = 4$$

فإن قيمة x هي:

(a) 5 (b) $\frac{4}{3}$ (c) 3 (d) -3

---

(171) معادله المستقم الذي ميله -7 ويقطع جزء قدره 4 من محور الصادات الموجب هي:

(a) $y = 7x + 4$ (b) $y = -7x - 4$ (c) $y = -7x + 4$ (d) $y = 7x - 4$

---

(172) إذا كانت

$$y = \log_a x$$

فإن:

(a) $a = x^y$ (b) $x = a^y$ (c) $y = a^x$ (d) $x = y^a$

---

(173) الداله

$$f(x) = x$$

هي داله:

(a) تربيعية (b) أسية (c) ثابتة (d) لوغاريتمية

---

(174) الفترة:

$$[2,3] = \{x: 2 \le x \le 3\}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(175) المقدار:

$$\frac{b^{-n}}{a^{-m}} = \frac{b^n}{a^m}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(176) المقدار:

$$(-2)(-3) = 6$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(177) إذا كانت

$$Y = \{1,2,3,4\}, \qquad X = \{1,2,3\}$$

فإن $X \in Y$:

(a) صواب (b) خطأ

---

(178) المقدار:

$$\log_2 x^3 = 3 \log_2 x$$

(a) صواب (b) خطأ

تمارين عامة

(179) الفترة $[9,12]$: مفتوحة

(a) صواب (b) خطأ

---

(180) الداله

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^3 - 2}$$

هي داله جذرية:

(a) صواب (b) خطأ

---

(181) المقدار:

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(182) مجموعة الإعداد الصحيحة هي

$$Z = \{1,2,3,4,5 \cdots\}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(183) المقدار:

$$\log_9 1 = 0$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(184) المقدار:

$$\log_5(xy) = \log_5 x - \log_5 y$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(185) العدد 19 هو عدد طبيعي

(a) صواب (b) خطأ

---

(186) الداله

$$f(x) = |x|$$

ليست داله زوجية:

(a) صواب (b) خطأ

---

(187) المقدار:

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(188) المقدار:

$$\left(\frac{6}{2}\right)^0 = 3$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(189) المقدار:

$$\left(\frac{y}{-3}\right)^2 = \frac{-y^2}{3^2}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(190) العلاقة:

$$\{(2,3), (1,4), (6,3)\}$$

لا يمثل داليه

(a) صواب (b) خطأ

---

(191) المقدار:

$$x^m x^n = x^{n-m}$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(192) المقدار:

$$\log_3 \frac{x}{y} = \log_3 x - \log_3 y$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(193) المقدار:

$$3x^2 - 3x^2 = 2$$

(a) صواب (b) خطأ

تمارين عامة

(194) الداله

$$f(x) = 2x^{\frac{7}{2}} + x^2 - 4$$

هى داله كثيرة حدود.

(a) صواب (b) خطأ

---

(195) الصورة العامة لمعادله الدرجة الاولى هى

$$(\sqrt{4})(\sqrt{4}) = 4$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(196) المقدار:

$$3x^2 - 3x^2 = 2$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(197) المقدار:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(198) المقدار:

$$-2(x + 3) = -2x - 6$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(199) المقدار:

$$\sqrt{6x^2} = 3x$$

(a) صواب (b) خطأ

---

(200) مجال الداله:

$$f(x) = 3x^4 - 1$$

هو R.

(a) صواب (b) خطأ

---

(201) المقدار:

$$\frac{9x^5y^4}{3x^3y}$$

(a) $9x^2y^3$ (b) $3x^3y^2$ (c) $3x^2y^3$

---

(202) الداله:

$$f(x) = \frac{x}{3x^3 - \sqrt{4}}$$

هي داله:

(a) كثيرة حدود (b) كسرية (b) جذرية (d) أسية

---

(203) إذا كانت:

$$x^2 - 3x = 0$$

فإن قيمة x هي:

(a) $0,3$ (b) $0,-3$ (b) $1,3$ (d) $3,-1$

---

(204) إذا كان ميل المستقم -12 فإن ميل العمودي هو:

(a) $-\frac{1}{12}$ (b) -12 (b) $\frac{1}{12}$ (d) 12

---

(205) إذا كانت:

$$-x + y = 5\,, \qquad x + 2y = 4$$

فإن:

(a) $y = 2, x = -2$ (b) $y = 3, x = -2$ (b) $y = 1, x = -2$ (d) $y = -1, x = -2$

---

(206) إذا كانت:

$$\log_4 x = 3$$

فإن قيمة x هي:

(a) 3^4 (b) 4 (b) 4^3 (d) 3

---

(207) مجال الداله:

$$f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$$

فإن قيمة x هي:

(a) R (b) $R - \{2\}$ (b) $[2, \infty)$ (d) $\{2\}$

1-مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها جامعة الملك عبد العزيز-كلية العلوم - قسم الرياضيات - الطبعة الخامسة 1434هـ

2 -PRECALCULUS MATHEMATICS FOR CALCULUS- 6 Edition
JAMES STEWART, LOTHAR REDLIN and SALEEM WATSON , 2006

